Современная экономическая наука и образование в России

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПРОГРАММЫ «МАГИСТР ЭКОНОМИКИ» РЭШ С 2000 ПО 2024 ГОДЫ

Москва 2024

Содержание

1 Вступительный экзамен 2000 г. 5

1.1 Задачи, вариант 1 . . . 6

1.2 Задачи, вариант 2 . . . 6

1.3 Тест, вариант 1 . . . 7

1.4 Тест, вариант 2 . . . 10

1.5 Решения задач, вариант 1 . . . 13

1.6 Решения задач, вариант 2 . . . 16

1.7 Ответы на тест, вариант 1 . . . 19

1.8 Ответы на тест, вариант 2 . . . 21

2 Вступительный экзамен 2001 г. 23

2.1 Задачи . . . 23

2.2 Тестовые вопросы . . . 24

2.3 Решения задач . . . 28

2.4 Ответы на тестовые вопросы . . . 30

3 Вступительный экзамен 2002 г. 32

3.1 Тест . . . 32

3.2 Ответы и решения теста . . . 39

4 Вступительный экзамен 2003 г. 43

4.1 Тест . . . 43

4.2 Ответы и решения теста . . . 60

5 Вступительный экзамен 2004 г. 66

5.1 Тест . . . 66

5.2 Ответы и решения теста . . . 82

6 Вступительный экзамен 2005 г. 87

6.1 Тест . . . 87

6.2 Ответы и решения теста . . . 104

7 Вступительный экзамен 2006 г. 113

7.1 Тест . . . 113

7.2 Ответы и решения теста . . . 128

8 Вступительный экзамен 2007 г. 134

8.1 Тест . . . 134

8.2 Ответы и решения теста . . . 150

9 Вступительный экзамен 2008 г. 156

9.1 Тест . . . 156

9.2 Ответы и решения теста . . . 173

10 Вступительный экзамен 2009 г. 177
10.1 Тест . . . 177
10.2 Ответы и решения теста . . . 192

11 Вступительный экзамен 2010 г. 197
11.1 Тест . . . 197
11.2 Ответы и решения теста . . . 213

12 Вступительный экзамен 2011 г. 218
12.1 Тест . . . 218
12.2 Ответы и решения теста . . . 235

13 Вступительный экзамен 2012 г. 241
13.1 Тест . . . 241
13.2 Ответы и решения теста . . . 256

14 Вступительный экзамен 2013 г. 261
14.1 Тест . . . 261
14.2 Ответы и решения теста . . . 277

15 Вступительный экзамен 2014 г. 282
15.1 Тест . . . 282
15.2 Ответы и решения теста . . . 297

16 Вступительный экзамен 2015 г. 305
16.1 Тест 1 (общий для программ МАЭ и МЭРЭ) . . . 305
16.2 Тест 2 (программа МАЭ) . . . 315
16.3 Ответы и решения теста . . . 320

17 Вступительный экзамен 2016 г. 324
17.1 Тест . . . 324
17.2 Ответы и решения теста . . . 339

18 Вступительный экзамен 2017 г. 349
18.1 Тест . . . 349
18.2 Ответы и решения теста . . . 361

19 Вступительный экзамен 2018 г. 366
19.1 Тест . . . 366
19.2 Ответы и решения теста . . . 378

20 Вступительный экзамен 2019 г. 382
20.1 Тест . . . 382
20.2 Ответы и решения теста . . . 394

21 Вступительный экзамен 2020 г. **398**

21.1 Тест . . . 398

21.2 Ответы и решения теста . . . 410

22 Вступительный экзамен 2021 г. **416**

22.1 Тест . . . 416

22.2 Ответы и решения теста . . . 428

23 Вступительный экзамен 2022 г. **435**

23.1 Тест . . . 435

23.2 Ответы и решения теста . . . 448

24 Вступительный экзамен 2023 г. **452**

24.1 Тест . . . 452

24.2 Ответы и решения теста . . . 464

25 Вступительный экзамен 2024 г. **471**

25.1 Тест . . . 471

25.2 Ответы и решения теста . . . 483

1 Вступительный экзамен 2000 г.

Письменный экзамен в 2000 г. состоял из 2-х частей (которые проводились в разные дни):

1. часть A — решение 4-х задач по математическому анализу и линейной алгебре, продолжительность экзамена 4 часа, максимальная оценка 8 баллов.

2. Часть Б — ответы на тестовые вопросы, продолжительность теста 3 часа, максимальная оценка 4 балла.

Правила оценивания части A экзамена были следующие: Для каждой задачи из части A указывалось максимальное число очков, которое можно получить за ее решение. Число баллов за часть A экзамена определялось суммой набранных при решении задач очков.

Тест состоял из ряда вопросов по математическому анализу и линейной алгебре следующих типов:

1. вопросы, требующие ответа «да» или «нет»,

2. вопросы, требующие выбора правильного ответа из нескольких предложенных вариантов.

3. вопросы, предполагающие ответ в свободной и краткой форме.

Правила оценивания теста были следующие:

Для задачи типа 1

* за правильный ответ абитуриент получал «+1» очко,
* за отсутствие ответа — «0» очков,
* за неправильный ответ — «−1» очко.

Для задачи типа 2

* за правильный ответ абитуриент получал «+2» очка,
* за отсутствие ответа — «0» очков,
* за неправильный ответ — «−1» очко.

Для задачи типа 3

* за правильный ответ абитуриент получал «+2» очка,
* в остальных случаях — «0» очков.

Число баллов за тест определялось суммой набранных при ответах на вопросы теста очков.

Оценка за экзамен равнялась сумме баллов, полученных за обе части экзамена.

Ниже приводятся два варианта экзамена, то есть два варианта части A с решениями и два варианта части Б с правильными ответами (которые выделены) и с соответствующими пояснениями.

1.1 Задачи, вариант 1

Задача 1. *(15 очков)* Найти область определения и построить график функции $f(x) = (x+1)\lim\limits_{n\to\infty}(\operatorname{arctg} x^n)$.

Задача 2. *(25 очков)* Найти (если существуют) точки наименьшего значения функции $f(x,y) = \max\{x^2+y^2-5, 2x^2-3y^2+1\}$.

Задача 3. *(30 очков)* Функция $f(x)$ при $x \in (-\infty, +\infty)$ задана формулой

$$f(x) = \int_{2+x}^{1-x} e^{(2y-3)^2}[1 - y\,\operatorname{sign}(y-1)]\,dy.$$

Найти (если существуют) локальные максимумы и минимумы функции $f(x)$.

Замечание. По определению $\operatorname{sign} u = \begin{cases} 1, & \text{при } u>0, \\ 0, & \text{при } u=0, \\ -1, & \text{при } u<0. \end{cases}$

Задача 4. *(30 очков)* Заданы две системы линейных однородных уравнений, матрицы которых зависят от параметров α, β: $A(\alpha,\beta)x = 0$ и $B(\alpha,\beta)x = 0$, где вектор $x \in \mathbf{R}^3$ и

$$A(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha^2-1 & 0 & \alpha^2-1 \\ \beta+2 & \beta+2 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \end{pmatrix},$$

$$B(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta+2 & \beta-\alpha-2 \\ 1-\beta & \beta-1 & \beta(\beta-1) \\ 0 & 0 & \beta^2-1 \end{pmatrix}.$$

Найти значения пар (α,β), при которых множество решений этих систем уравнений являются ортогональными дополнениями друг к другу.

1.2 Задачи, вариант 2

Задача 1. *(15 очков)* Найти область определения и построить график функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}((x+1)\operatorname{arctg} x^n)$.

Задача 2. *(25 очков)* Найти (если существуют) точки наибольшего и наименьшего значений функции $f(x,y,z) = x+2y+3z$ при ограничении $x^2+y^2 \leqslant z \leqslant 1$.

Задача 3. *(30 очков)* Функция $f(x)$ при $x \in (-\infty, +\infty)$ задана формулой

$$f(x) = \int_{x-1}^{1-x} e^{y^2}[2 + (1-y)\operatorname{sign}(1+y)]\,dy.$$

Найти (если существуют) локальные максимумы и минимумы функции $f(x)$.

Замечание. По определению $\operatorname{sign} u = \begin{cases} 1, & \text{при } u > 0, \\ 0, & \text{при } u = 0, \\ -1, & \text{при } u < 0. \end{cases}$

Задача 4. *(30 очков)* Найти все значения пар (α, β), при которых существует вещественная симметричная матрица A, имеющая характеристический многочлен

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\beta\lambda^2 - 3(\beta^2 - \beta + 1)\lambda + \beta(2\alpha - \beta),$$

и для которой векторы $x = (\alpha, 0, 2\alpha - \beta)$, $y = (\alpha, 2\alpha - \beta, 0)$, $z = (0, \alpha, \alpha)$ являются собственными. Для каждого решения привести пример матрицы A.

1.3 Тест, вариант 1

1.3.1 Группа 1: ответы «Да» или «Нет»

1. Может ли последовательность функций, не являющихся непрерывными, сходиться равномерно к непрерывной функции?

Да Нет

2. Функция определена и равномерно непрерывна на каждом из отрезков $[2, 4]$ и $[5, 7]$. Будет ли равномерно непрерывна на множестве $[2, 4] \cup [5, 7]$?

Да Нет

3. Известно, что $a_i > 0$ при $i = 1, 2, \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{i=1}^n a_i = 0$, где $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

Да Нет

4. Является ли дифференцируемой в точке $x = 0$ функция $f(x) = |x| - |\sin x|$?

Да Нет

5. Является ли счетным множество решений (x, y) уравнения $\sin(xy) = 1$, где x и y — вещественные переменные?

Да Нет

6. Система векторов $\widetilde{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ik}, c_i)$, $i = 1, \ldots, m$, получается из линейно зависимой системы $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ik})$, $i = 1, \ldots, m$, добавлением $(k+1)$-й компоненты c_i к каждому вектору a_i, $i = 1, \ldots, m$. Может ли система векторов $\widetilde{a}_i$, $i = 1, \ldots, m$, оказаться линейно независимой?

Да Нет

7. Функция $f(x)$ определена и выпукла на отрезке $[0, 2]$, причем $f(0) = 2$, $f(2) = -3$. Верно ли утверждение, что интеграл $\int_0^2 f(x)dx$ есть величина отрицательная?

Да Нет

1.3.2 Группа 2: выбор ответа из нескольких вариантов

8. Известно, что некоторая подпоследовательность монотонной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел. Выберите правильное утверждение:

1) последовательность $\{a_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ сходится;

2) последовательность $\{a_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ может быть неограниченной;

3) ни одно из утверждений 1), 2) не следуют из условий, наложенных на последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

9. Дана система линейных уравнений $Ax = b$, где A — прямоугольная матрица. Выберите правильное утверждение:

1) если столбцы матрицы A линейно независимы, то система имеет решение при любом b;

2) если строки матрицы A линейно независимы, то система имеет решение при любом b;

3) если столбцы матрица A линейно зависимы, то система имеет бесконечно много решений при любом b.

10. Выберите правильное утверждение.

Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на множестве M, если

1) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $N > 0$ и $x \in M$, что если $n > N$, $m > N$, то $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $N > 0$ и $\delta > 0$, что если $n > N$, $x \in M$, $y \in M$ и $|x - y| < \delta$, то $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$;

3) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N > 0$, что если $x \in M$, $n > N$, $m > N$, то $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

11. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и обладает следующим свойством: для любого $\delta > 0$ и любой точки x_0 существует такое $\varepsilon > 0$, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Выберите правильное утверждение:

1) функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке x_0;

2) функция $f(x)$ ограничена на всей числовой прямой;

3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из условий, наложенных на функцию $f(x)$.

12. Известно, что $f(x)$ — определенная на всей числовой прямой неубывающая функция, а суперпозиция $\varphi(f(x))$ — строго возрастающая функция. Выберите правильное утверждение:

1) $\varphi(y)$ — строго возрастающая функция;

2) обе функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ строго возрастают;

3) функция $f(x)$ — строго возрастающая;

4) ни одно из утверждений 1)—3) не следует из приведенных условий.

13. Элементы $n \times n$-матрицы $A = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, $n > 1$, имеют вид $a_{ij} = \alpha_i \beta_j - 3\beta_j$, где $a_i \neq 3$, $b_j \neq 0$. Выберите правильное утверждение:

1) ранг матрицы A равен n;

2) ранг матрицы A равен 1;

3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из приведенных условий.

14. Пусть $F(x) = \varphi(x) f(x)$, где $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $\varphi(x)$ разрывна в точке x_0. Выберите правильное утверждение:

1) $F(x)$ непрерывна в точке x_0;

2) $F(x)$ разрывна в точке x_0;

3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из приведенных условий.

15. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[0, 2]$, принимает на этом отрезке только рациональные значения и $f(1) = 1/2$. Выберите правильное утверждение:

1) множество значений функции $f(x)$ счетно;

2) функция $f(x)$ дифференцируема на $(0, 2)$;

3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из условий, наложенных на функцию $f(x)$.

16. Дана система линейных уравнений $Ax = b$, где A — квадратная матрица, причем $\det A = 0$. Выберите правильное утверждение:

1) система несовместна при любом b;

2) система имеет бесконечное множество решений при любом b;

3) система либо имеет единственное решение, либо имеет бесконечное множество решений;

4) система либо несовместна, либо имеет бесконечное множество решений;

5) ни одно из утверждений 1)—4) не следует из приведенных условий.

1.3.3 Группа 3: ответ в свободной форме

17. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin(1/x)$ при $x \in (0, 2/\pi)$ и обозначим через $M \subset \mathbf{R}^2$ множество точек (x, y) ее графика. Опишите множество граничных точек множества M.

18. Пусть A — линейный оператор из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, имеющий n различных собственных значений. Сколько различных инвариантных подпространств имеет оператор A?

19. Приведите пример функции, которая на интервале $(0, 1)$ имеет локальный максимум, но не имеет стационарных точек.

20. Пусть A — невырожденная квадратная матрица второго порядка, а матрица $A^2 + 2A$ — вырожденная и имеет собственное число -1. Какие собственные числа имеет матрица A?

1.4 Тест, вариант 2

1.4.1 Группа 1: ответы «Да» или «Нет»

1. Верно ли, что $f(x) = x - \sin x$ является строго монотонной функцией?

Да Нет

2. Система векторов $\widetilde{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ik})$, $i = 1, \ldots, m$, получается из линейно независимой системы $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ik}, c_i)$, $i = 1, \ldots, m$, отбрасыванием у каждого вектора последней, $(k+1)$-й, компоненты c_i. Может ли система векторов $\widetilde{a}_i$, $i = 1, \ldots, m$, быть линейно зависимой?

Да Нет

3. Может ли интервал $(2, 9)$ быть образом отрезка $[2, 5]$ при непрерывном отображении?

Да Нет

4. Является ли счетным множество точек $\left(\sqrt{m/n}, \sqrt{mn}\right) \in \mathbf{R}^2$, где m и n — любые натуральные числа?

Да Нет

5. Является ли функция двух вещественных аргументов $f(x,y) = |x-y|^3$ дифференцируемой в точке $(x,y) = (0,0)$?

Да Нет

6. Функция $f(x)$ определена и выпукла на $[-1,1]$, причем $f(-1) = 1$, $f(1) = -1$. Верно ли утверждение, что интеграл $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ есть величина положительная?

Да Нет

7. Функция равномерно непрерывна на каждом из отрезков $[2,4]$ и $[3,7]$. Будет ли она равномерно непрерывна на отрезке $[2,7]$?

Да Нет

8. Известно, что $a_i \neq 0, i = 1,2,\dots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$ где $\prod_{i=1}^{n} a_i^2 = a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \ldots \cdot a_n^2$. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

Да Нет

1.4.2 Группа 2: выбор ответа из нескольких вариантов

9. Функция $F(x)$ определена и непрерывна на $[-1,1]$, принимает на этом отрезке только иррациональные значения и $F(-1) = F(1) = \sqrt{2}$. Выберите правильное утверждение:

1) множество значений функции $F(x)$ несчетно;

2) функция $F(x)$ имеет на интервале $(-1,1)$ локальный экстремум;

3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из условий, наложенных на функцию $F(x)$.

10. Каждый элемент $n \times n$-матрицы A $(n > 1)$ имеет вид $a_{ij} = \gamma_i/\beta_j + \gamma_i\beta_j$, где $\gamma_i \neq 0$, $\beta_j \neq 0$. Выберите правильное утверждение:

1) ранг матрицы A равен n;

2) ранг матрицы A равен 1;

3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из условий, наложенных на матрицу A.

11. Пусть $F(x) = f(x) + \varphi(x)$, где $f(x)$ — непрерывная в точке x_0 функция, а функция $\varphi(x)$ разрывна в точке x_0. Выберите правильное утверждение:

1) функция $F(x)$ непрерывна в точке x_0;

2) функция $F(x)$ разрывна в точке x_0;

3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из приведенных условий.

12. Выберите правильный вариант определения. Функция называется равномерно непрерывной на множестве $M \subset \mathbf{R}$, если

1) для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x \in M$ найдется такое число $\delta > 0$, что если $y \in M$ и $|x - y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что если $x \in M$, $y \in M$ и $|x - y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$;

3) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $x \in M$ и $\delta > 0$, что если $y \in M$ и $|x - y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

13. Известно, что некоторая подпоследовательность монотонной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел. Выберите правильное утверждение:

1) последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится;

2) последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ может быть неограниченной;

3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из условий, наложенных на последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

14. Дана система линейных уравнений $Ax = b$, где A — прямоугольная матрица. Выберите правильное утверждение:

1) если столбцы матрицы A линейно независимы, то система имеет не более одного решения при любом b;

2) если строки матрицы A линейно независимы, то система имеет не более одного решения при любом b;

3) если строки матрицы A линейно зависимы, то система имеет бесконечно много решений при любом b.

15. Известно, что $f(x)$ — определенная на всей числовой прямой невозрастающая функция, а суперпозиция $\varphi(f(x))$ — строго убывающая функция. Выберите правильное утверждение:

1) $\varphi(y)$ — строго убывающая функция;

2) обе функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ строго убывают;

3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из условий, наложенных на функции $f(x)$ и $\varphi(y)$.

16. Дана система линейных уравнений $Ax = b$, где A — квадратная матрица, причем $\det A = 0$. Выберите правильное утверждение:

1) существует вектор b, при котором система несовместна;

2) для любого вектора b множество решений системы бесконечно;

3) существует такой вектор b, что решение системы существует и единственно;

4) ни при какой правой части b система не имеет решения;

5) ни одно из утверждений 1)—4) не следует из приведенных условий.

1.4.3 Группа 3: ответ в свободной форме

17. Линейный оператор $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ имеет бесконечно много одномерных инвариантных подпространств. Какое максимальное число различных собственных значений может иметь оператор A?

18. Приведите пример функции, определенной на отрезке $[0,1]$, множество значений которой совпадает с интервалом $(0,1)$.

19. Пусть A — матрица второго порядка, имеющая два различных собственных числа. Какие собственные числа имеет матрица A, если известно, что A^2+A — нулевая матрица?

20. Рассмотрим множество $M \subset \mathbf{R}^2$, состоящее из точек (x,y), для которых $x \in \{1/n, n = 1, 2, \dots\}$ и $y = \sin(\pi x/3)$. Опишите множество предельных точек множества M.

1.5 Решения задач, вариант 1

Решение задачи 1. 1. Заметим, что:

* если $x \leqslant -1$, то
$$\begin{cases} x^n \geqslant 1 \text{ и } \operatorname{arctg} x^n \geqslant \pi/4 \text{ при } n = 2k, \\ x^n \leqslant -1 \text{ и } \operatorname{arctg} x^n \leqslant -\pi/4 \text{ при } n = 2k-1, \end{cases}$$
следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} (\operatorname{arctg} x^n)$ не существует;
* если $|x| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} (\operatorname{arctg} x^n) = 0$;
* если $x = 1$, то $x^n = 1$, и $\lim\limits_{n\to\infty} (\operatorname{arctg} x^n) = \pi/4$;
* если $x > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = +\infty$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} (\operatorname{arctg} x^n) = \pi/2$.

2. Из п. 1 и определения $f(x)$ получаем, что
$$f(x) = \begin{cases} \text{не определена} & \text{при } x \leqslant -1, \\ 0, & \text{при } -1 < x < 1, \\ \pi/2, & \text{при } x = 1, \\ (x+1)\pi/2, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

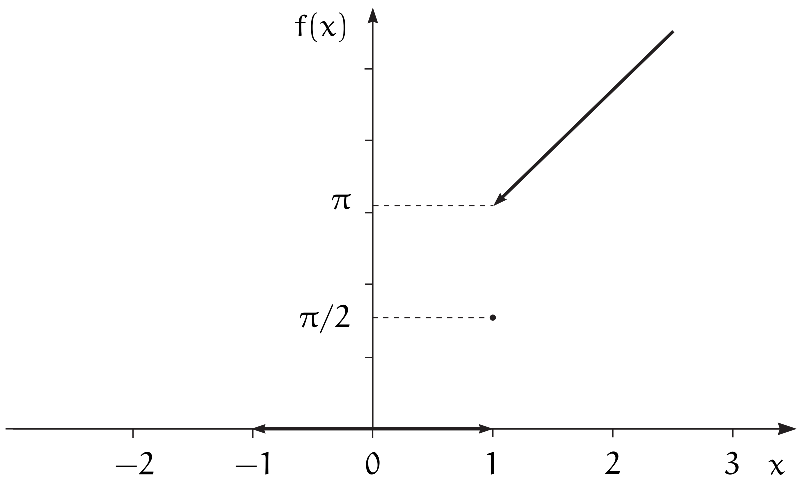


Рис. 1. График функции $f(x)$

Таким образом, областью определения $f(x)$ является интервал $(-1, +\infty)$. Ее график изображен на рисунке 1.

Решение задачи 2. 1. Так как $x^2 + y^2 - 5 \geqslant -5$, то $f(x, y) \geqslant -5$ при любых $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Поэтому существует $m = \inf\{f(x, y), (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$. Далее, поскольку $f(0, 0) = 1$, а $x^2 + y^2 - 5 > 1$ при $x^2 + y^2 > 6$, то $m = \inf\{f(x, y), x^2 + y^2 \leqslant 6\}$. Функция $f(x, y)$ непрерывна как максимум двух непрерывных функций, а круг $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 6\}$ есть компактное множество. Следовательно, $f(x, y)$ имеет точку наименьшего значения.

2. Пусть (x_0, y_0) — искомая точка. Обозначим $g(x, y) = x^2+y^2-5$, $h(x, y) = 2x^2-3y^2+1$.

Рассмотрим три возможных случая.

а) $g(x_0, y_0) > h(x_0, y_0)$. Тогда $f(x, y) = g(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Значит, (x_0, y_0) — точка локального минимума функции $g(x, y)$ и $\partial g/\partial x(x_0, y_0) = \partial g/\partial y(x_0, y_0) = 0$, то есть $x_0 = y_0 = 0$. Но $g(0, 0) = -5 < h(0, 0) = 1$. Следовательно, случай а) невозможен.

б) $g(x_0, y_0) < h(x_0, y_0)$. Тогда $f(x, y) = h(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и $\partial h/\partial x(x_0, y_0) = \partial h/\partial y(x_0, y_0) = 0$, то есть $x_0 = y_0 = 0$. Но точка $(0, 0)$ не является точкой минимума функции h, поскольку матрица вторых производных функции $h(x, y)$ в точке $(0, 0)$ не является неотрицательно определенной. (Тот факт, что точка $(0, 0)$ не является точкой минимума функции h, почти очевиден: в окрестности этой точки функция h возрастает по x и убывает по y.) Значит, случай б) также невозможен.

в) $g(x_0, y_0) = h(x_0, y_0)$. Тогда точка (x_0, y_0) — это точка минимума функции $g(x, y) = x^2 + y^2 - 5$ при ограничении $h(x, y) - g(x, y) = x^2 - 4y^2 + 6 = 0$. Составим функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = x^2 + y2 - 5 - \lambda(x^2 - 4y^2 + 6)$ и напишем необходимое условие минимума:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 8\lambda y = 0, \quad x^2 - 4y^2 + 6 = 0.$$

Отсюда $x(1 - \lambda) = 0$, $y(1 + 4\lambda) = 0$, $x^2 - 4y^2 + 6 = 0$.

Если $\lambda = 1$, то $y = 0$ и $x^2 + 6 = 0$, что невозможно.

Если $\lambda \neq 1$, то $x = 0$ и $y^2 = 3/2$, т. е. точки $(0, \sqrt{3/2})$ и $(0, -\sqrt{3/2})$ удовлетворяют необходимому условию минимума. Поскольку значения функции $f(x, y)$ в обеих точках одинаковы, то найденные две точки — искомые.

Ответ. Минимум $f(x, y)$ достигается в точках $(0, \sqrt{3/2})$, $(0, -\sqrt{3/2})$.

Решение задачи 3. Обозначим через $\varphi(y)$ подынтегральное выражение. Функция $\varphi(y)$ непрерывна везде, кроме точки $y = 1$, в которой она терпит разрыв первого рода. Поэтому существует непрерывная первообразная $\Phi(y)$, дифференцируемая при $y \neq 1$. При этом $\Phi'(y) = \varphi(y)$, если $y \neq 1$, а в точке $y = 1$ у функции $\Phi(y)$ производной (двусторонней) нет. Так как $f(x) = \Phi(1 - x) - \Phi(2 + x)$, то функция $f(x)$ также дифференцируема в точках x, для которых $1 - x \neq 1$ и $2 + x \neq 1$, то есть при $x \neq 0$ и $x \neq -1$.

Следовательно, подозрительными на экстремум являются точки $x = 0$ и $x = -1$, а также те точки интервалов $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$, в которых $f'(x) = 0$.

По правилу дифференцирования сложной функции $f'(x) = -\Phi'(1 - x) - \Phi'(2 + x) = -\varphi(1 - x) - \varphi(2 + x)$, то есть $f'(x) = e^{(2x+1)^2}[(1 - x)\operatorname{sign}(-x) + (2 + x)\operatorname{sign}(1 + x) - 2]$. Рассмотрим все возможные случаи.

Если $x \in (-\infty, -1)$, то $\operatorname{sign}(-x) = 1$, $\operatorname{sign}(1 + x) = -1$ и, следовательно, $f'(x) = -e^{(2x+1)^2}[3 + 2x]$. Отсюда $f'(-3/2) = 0$, $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, -3/2)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (-3/2, -1)$. Поэтому точка $x = -3/2$ является точкой локального максимума.

Если $x \in (-1, 0)$, то $\operatorname{sign}(-x) = \operatorname{sign}(1+x) = 1$, так что $f'(x) = e^{(2x+1)^2} > 0$ при этих x. На интервале $(-1, 0)$ точек экстремума нет, однако точка $x = -1$ является точкой локального минимума, так как функция $f(x)$ слева от $x = -1$ убывает, а справа — возрастает.

Если $x \in (0, +\infty)$, то $\operatorname{sign}(-x) = -1$, $\operatorname{sign}(1+x) = 1$, и $f'(x) = e^{(2x+1)^2}(2x-1)$. Видим, что $f'(1/2) = 0$, $f'(x) < 0$ при $x \in (0, 1/2)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (1/2, +\infty)$. Точка $x = 1/2$ является точкой локального минимума. Одновременно устанавливаем, что точка $x = 0$ является точкой локального максимума, поскольку $f(x)$ возрастает слева и убывает справа от нее.

Ответ. Функция имеет локальные максимумы при $x = -3/2$ и $x = 0$ и локальные минимумы при $x = -1$ и $x = 1/2$.

Решение задачи 4. Множество решений каждой линейной однородной системы — это в точности ортогональное дополнение к линейной оболочке строк ее матрицы. Поэтому требуется определить те значения параметров α и β , при которых линейная оболочка строк одной из матриц, скажем $A(\alpha, \beta)$, являлась бы множеством решений второй системы, т. е. $B(\alpha, \beta)x = 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank} A(\alpha, \beta) + \operatorname{rank} B(\alpha, \beta) = 3$ и каждая строка матрицы $A(\alpha, \beta)$ была решением системы $B(\alpha, \beta)x = 0$, то есть

$$\begin{cases} 2(\alpha^2 - 1)(\beta - 1) = 0, \\ (\alpha^2 - 1)(\beta - 1)^2 = 0, \\ (\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1) = 0, \end{cases} \begin{cases} 2(\beta + 2)(\alpha + 1) = 0, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0, \end{cases} \begin{cases} 0 = 0, \\ (\alpha - 1)(\beta^2 - 1) = 0, \\ (\alpha - 1)(\beta^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение $2(\beta+2)(\alpha+1)=0$.

Если $\beta=-2$, то единственное значение $\alpha=1$. При этом

$$A(1,-2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad B(1,-2)=\begin{pmatrix}-1&5&-5\\3&-3&6\\0&0&3\end{pmatrix},$$

$\operatorname{rank} A=0$, $\operatorname{rank} B=3$, т. е. пара $(\alpha,\beta)=(1,-2)$ является решением задачи.

Если $\beta\neq-2$, то $\alpha=-1$. При этом должно быть $\beta^2=1$, т. е. $\beta=+1$ или $\beta=-1$.

Если $(\alpha,\beta)=(-1,1)$, то

$$A(-1,1)=\begin{pmatrix}0&0&0\\3&3&0\\0&-2&-2\end{pmatrix},\quad B(-1,1)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$\operatorname{rank} A=2$, $\operatorname{rank} B=0$, и пара $(\alpha,\beta)=(-1,1)$ не подходит.

Если $(\alpha,\beta)=(-1,-1)$, то

$$A(-1,-1)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&-2&-2\end{pmatrix},\quad B(-1,-1)=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\2&-2&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$\operatorname{rank} A=2$, $\operatorname{rank} B=1$, и пара $(\alpha,\beta)=(-1,-1)$ является решением задачи.

Ответ. $(\alpha,\beta)=(1,-2)$ и $(\alpha,\beta)=(-1,-1)$.

1.6 Решения задач, вариант 2

Решение задачи 1. 1. Заметим, что:

* если $x<-1$, то

$$\begin{cases}x^n\geqslant 1 \text{ и } \operatorname{arctg} x^n\geqslant \pi/4 \text{ при } n=2k,\\ x^n\leqslant -1 \text{ и } \operatorname{arctg} x^n\leqslant -\pi/4 \text{ при } n=2k-1,\end{cases}$$

  следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(\operatorname{arctg} x^n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}((x+1)\operatorname{arctg} x^n)$ не существуют;

* если $x=1$, то $(x+1)\operatorname{arctg} x^n=0$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}((x+1)\operatorname{arctg} x^n)=0$;

* если $|x|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}(\operatorname{arctg} x^n)=0$;

* если $x=1$, то $x^n=1$, и $\lim\limits_{n\to\infty}((x+1)\operatorname{arctg} x^n)=2\operatorname{arctg} 1=\pi/2$;

* если $x>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=+\infty$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}((x+1)\operatorname{arctg} x^n)=(x+1)\pi/2$.

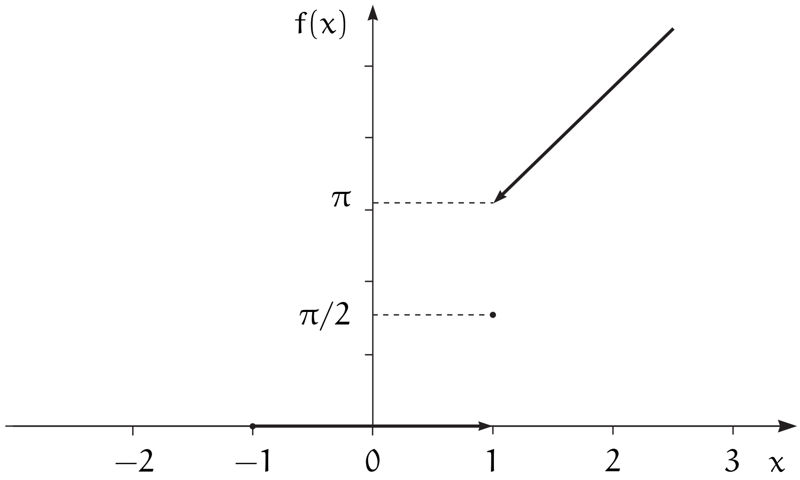


Рис. 2. График функции $f(x)$

2. Из п. 1 и определения $f(x)$ получаем, что

$$f(x) = \begin{cases} \text{не определена} & \text{при } x < -1, \\ 0, & \text{при } -1 \leqslant x < 1, \\ \pi/2, & \text{при } x = 1, \\ (x+1)\pi/2, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Таким образом, область определения $f(x)$ есть полуинтервал $[-1, +\infty)$. Ее график изображен на рисунке 2.

Решение задачи 2. 1. Обозначим $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1\}$. Очевидно, что множество M непусто и для любой точки $(x, y, z) \in M$ выполнены неравенства $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, т. е. множество M ограничено. Поскольку неравенства, определяющие M, нестрогие, то множество M замкнуто. Функция $f(x, y, z)$ непрерывна, поэтому она достигает на M наибольшего и наименьшего значений.

2. Пусть $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — искомая точка. Для этой точки ограничения задачи могут выполняться либо как строгие неравенства, либо как равенства. Рассмотрим все возможные случаи.

а) $x_0^2 + y_0^2 < z_0$, $z_0 < 1$. Это означает, что u_0 – внутренняя точка M. Но поскольку $\partial f/\partial x = 1 \neq 0$, $\partial f/\partial y = 2 \neq 0$, $\partial f/\partial z = 3 \neq 0$, то u_0 не может быть точкой локального экстремума. Следовательно, случай а) невозможен.

б) $x_0^2 + y_0^2 = z_0$, $z_0 < 1$. Тогда u_0 есть точка локального экстремума функции f при ограничении $x^2 + y^2 = z$.

Составим функцию Лагранжа: $L(x, y, z, \lambda) = x + 2y + 3z - \lambda(x^2 + y^2 - z)$ и запишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} \partial L/\partial x = 1 - 2\lambda x = 0, \\ \partial L/\partial y = 2 - 2\lambda y = 0, \\ \partial L/\partial z = 3 + \lambda = 0, \\ z = x^2 + y^2. \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = -3, \\ x = 1/2\lambda = -1/6, \\ y = 1/\lambda = -1/3, \\ z = 1/36 + 1/9 = 5/36 < 1. \end{cases}$$

Таким образом, точка $u_1 = (-1/6, -1/3, 5/36)$ является подозрительной на экстремум.

в) $x_0^2 + y_0^2 < z_0$, $z_0 = 1$. Тогда (x_0, y_0) является точкой локального экстремума функции $x + 2y + 3$ при ограничении $x^2 + y^2 < 1$. Аналогично п. а) получаем, что этого не может быть.

г) $x_0^2 + y_0^2 = z_0$, $z_0 = 1$. Тогда (x_0, y_0) является точкой локального экстремума функции $x + 2y + 3$ при ограничении $x^2 + y^2 = 1$. Аналогично п. б) составим функцию Лагранжа: $L(x, y, \lambda) = x + 2y + 3 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ и запишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} \partial L/\partial x = 1 - 2\lambda x = 0, \\ \partial L/\partial y = 2 - 2\lambda y = 0, \\ 1 = x^2 + y^2. \end{cases} \implies \begin{cases} y = 2x, \\ 5x^2 = 1. \end{cases}$$

Получаем еще две точки, подозрительные на экстремум: $u_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 1)$, $u_3 = (-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 1)$.

3. Таким образом, получены точки u_1, u_2, u_3, подозрительные на экстремум. При этом $f(u_1) = -5/12$, $f(u_2) = 3 + \sqrt{5}$, $f(u_3) = 3 - \sqrt{5}$. Очевидно, $f(u_2) > f(u_3) > 0 > f(u_1)$.

Ответ. Точкой наименьшего значения является точка $u_1 = (-1/6, -1/3, 5/36)$, а точкой наибольшего значения — точка $u_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 1)$.

Решение задачи 3. Обозначим через $\varphi(y)$ подынтегральное выражение. Функция $\varphi(y)$ непрерывна везде, кроме точки $y = -1$, в которой она терпит разрыв первого рода. Поэтому существует непрерывная первообразная $\Phi(y)$, дифференцируемая при $y \neq -1$. При этом $\Phi'(y) = \varphi(y)$, если $y \neq -1$, а в точке $y = -1$ у функции $\Phi(y)$ производной (двусторонней) нет. Так как $f(x) = \Phi(1 - x) - \Phi(x - 1)$, то функция $f(x)$ также дифференцируема в точках x, для которых $1 - x \neq -1$ и $x - 1 \neq -1$, то есть при $x \neq 2$ и $x \neq 0$.

Следовательно, подозрительными на экстремум являются точки $x = 0$ и $x = 2$, а также те точки x интервалов $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, +\infty)$, в которых $f'(x) = 0$. По правилу дифференцирования сложной функции $f'(x) = -\Phi(1 - x) - \Phi(x - 1)$, то есть $f'(x) = e^{(x-1)^2}[(x - 2)\operatorname{sign}(x) - x\operatorname{sign}(2 - x) - 4]$.

Рассмотрим все возможные случаи. Если $x \in (-\infty, 0)$, то $\operatorname{sign}(x) = -1$, $\operatorname{sign}(2 - x) = 1$, и, следовательно, $f'(x) = -2e^{(x-1)^2}(x + 1)$. Таким образом, $f'(-1) = 0$, $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, -1)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (-1, 0)$. Точка $x = -1$ является точкой локального максимума.

Если $x \in (0, 2)$, то $\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(2-x) = 1$, так что $f'(x) = -6e^{(x-1)^2} < 0$. На интервале $(0, 2)$ точек экстремума нет. Точка $x = 0$ также не является точкой экстремума, поскольку функция $f(x)$ убывает как слева, так и справа от нее.

Если $x \in (2, +\infty)$, то $\operatorname{sign}(x) = 1$, $\operatorname{sign}(2 - x) = -1$, и $f'(x) = 2e^{(x-1)^2}(x - 3)$. Видим, что $f'(3) = 0$, $f'(x) < 0$ при $x \in (2, 3)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (3, +\infty)$. Точка $x = 3$ является точкой локального минимума. Подозрительная точка $x = 2$ снова не является точкой экстремума, поскольку $f(x)$ убывает по обе стороны от нее.

Ответ. Функция имеет локальный максимум при $x = -1$ и локальный минимум при $x = 3$.

Решение задачи 4. Поскольку собственный вектор z не может быть нулевым, то допустимы лишь значения $\alpha \neq 0$. Рассмотрим два взаимоисключающих случая: $2\alpha - \beta \neq 0$ и $2\alpha - \beta = 0$.

1) Если $2\alpha - \beta \neq 0$, то собственные векторы x, y, z линейно независимы и попарно не ортогональны. Поскольку матрица A симметрична, то они должны соответствовать одному и тому же собственному числу кратности 3, и

$$p(\lambda) = -(\lambda - \lambda_0)^3 = -\lambda^3 + 3\lambda_0\lambda^2 - 3\lambda_0^2\lambda - \lambda_0^3,$$

т. е. $\lambda_0 = \beta$, $3\lambda_0^2 = 3(\beta^2 - \beta + 1)$ и $\lambda_0^3 = \beta(2\alpha - \beta)$. Отсюда находим, что $\lambda_0 = \beta = 1$ и $\alpha = 1$. Единственной симметричной матрицей, имеющей собственное число 1, кратность которого совпадает с порядком матрицы, является единичная матрица.

2) Если $2\alpha - \beta = 0$, то характеристический многочлен принимает вид

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\beta\lambda^2 - 3(\beta^2 - \beta + 1)\lambda,$$

и его корнями являются $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = (3\beta \pm \sqrt{-3(\beta - 2)^2})/2$. Так как у вещественной симметричной матрицы собственные числа вещественные, то единственным возможным значением является $\beta = 2$, и, следовательно, $\alpha = 1$. При этом собственное число 0 имеет кратность 1, а собственное число 3 — кратность 2. Полагая, что собственному числу 0 соответствует собственный вектор $x = y = (1, 0, 0)$, а собственный вектор $z = (0, 1, 1)$ соответствует собственному числу 3, то в качестве матрицы A получаем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Решения — две пары значений параметров: $(\alpha, \beta) = (1, 1)$, $(\alpha, \beta) = (1, 2)$. В качестве соответствующих им матриц можно взять, например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.7 Ответы на тест, вариант 1

1. Да, Пример: $f_n(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1/n, & \text{при } -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ равномерно на $[-1, 1]$.

2. Да, Следует непосредственно из определения.

3. Нет, Пример: $a_n = 1/2$, $n = 1, 2, \ldots$.

4. Да, Из формулы Тейлора $f(x) = \frac{|x|^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to 0$, и, следовательно, $f'(0) = 0$.

5. Нет, Множество решений содержит пары (x, y), для которых $xy = \pi/2$. Это множество пар несчетно (имеет мощность континуума).

6. Да, Пример: $a_1 = (0)$, $a_2 = (1)$ линейно зависимы, $\widetilde{a}_1 = (0, 1)$, $\widetilde{a}_2 = (1, 1)$ линейно независимы.

7. Да, Функция $f(x)$ в силу выпуклости не превосходит линейной функции, график которой проходит через точки $(0, 2)$ и $(2, -3)$, а интеграл от нее отрицателен.

8. 1, Из условий, наложенных на последовательность, следует, что сама последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится.

9. 2, Если строки матрицы A линейно независимы, то A имеет максимальный ранг, и в силу теоремы Кронекера—Капелли система имеет решение при любой правой части.

10. 3, Следует из критерия Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.

11. 3, Из условий лишь следует, что функция $f(x)$ ограничена на любом ограниченном множестве. Контрпример к 1) — функция Дирихле при $\varepsilon > 1$, контрпример к 2) — $f(x) = x$.

12. 3, Если $f(x)$, будучи неубывающей, не является строго возрастающей, то найдутся две точки $x_1 \neq x_2$, такие что $f(x_1) = f(x_2)$ и $\varphi(f(x_1)) = \varphi(f(x_2))$, что противоречит условиям. Контрпример к 1) и 2) — $f(x) = e^x$, $\varphi(x) = y^2$.

13. 2, Имеем $a_{ij} = (\alpha_i - 3)\beta_j$, т. е. все строки (и столбцы) матрицы A пропорциональны, откуда $\operatorname{rank} A \leqslant 1$, а так как матрица A ненулевая, то $\operatorname{rank} A = 1$.

14. 3, Рассмотреть два примера: $f(x) \equiv 1$ и $f(x) \equiv 0$.

15. 2, Из теоремы Коши о промежуточных значениях непрерывной функции следует, что $f(x)$ постоянна на $[0, 2]$.

16. 4, Система совместна при $b = 0$, причем однородная система имеет бесконечное множество решений. Линейная оболочка столбцов матрицы A не совпадает со всем пространством, так что система разрешима не при любом b.

17. Множество граничных точек — объединение графика M, точки $(2/\pi, 1)$ и отрезка $[-1, 1]$ оси Oy.

18. Количество различных инвариантных подпространств равно 2^n. Оно совпадает с числом всех подмножеств множества из n элементов.

19. Пример: $f(x) = -|x - 1/2|$.

20. Так как матрицы $A^2 + 2A = A(A + 2I)$ и $A^2 + 2A + I = (A + I)^2$ — вырожденные, то $A + 2I$ и $A + I$ — тоже вырожденные, где I — единичная матрица. Таким образом, матрица A имеет собственные числа -2 и -1. Можно проверить, что матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ удовлетворяет условию задачи.

1.8 Ответы на тест, вариант 2

1. Да, Имеем $f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$ и $f'(x) = 0$ только в изолированных точках, поэтому функция строго возрастает.

2. Да, Пример: $a_1 = (0, 1)$, $a_2 = (1, 1)$ линейно независимы, $\widetilde{a}_1 = (0)$, $\widetilde{a}_2 = (1)$ линейно зависимы.

3. Нет, По теореме Вейерштрасса числа 2 и 9 должны принадлежать образу непрерывного отображения.

4. Да, Элементы этого множества находятся во взаимно однозначном соответствии с парами (m, n) натуральных чисел.

5. Да, Функция $f(x, y)$ является суперпозицией $g(h(x, y))$ дифференцируемых функций $h(x, y) = x - y$ и $g(z) = |z|^3$.

6. Нет, Функция $f(x)$ в силу выпуклости не превосходит линейной функции, проходящей через точки $(-1, 1)$ и $(1, -1)$, интеграл от которой равен нулю.

7. Да, Сразу следует из определения равномерной непрерывности.

8. Нет, Пример: $a_n = 1/2$, $n = 1, 2, \ldots$.

9. 2, Из теоремы Коши о промежуточных значениях непрерывной функции следует, что $F(x)$ постоянна на $[-1, 1]$.

10. 2, Имеем $a_{ij} = \gamma_i(1/\beta_j + \beta_j)$, т. е. все строки (и столбцы) матрицы A пропорциональны, откуда $\operatorname{rank} A \leqslant 1$, а так как матрица A ненулевая, то $\operatorname{rank} A = 1$.

11. 2, Имеем $\varphi(x) = F(x) - f(x)$, поэтому если бы $F(x)$ была непрерывна в точке x_0, то и $\varphi(x)$ была бы непрерывна точке x_0.

12. 2, См. определение равномерной непрерывности функции.

13. 1, Так как последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и имеет предельную точку, то она сходится.

14. 1, Если система имеет решение при некотором b, то b есть линейная комбинация столбцов матрицы A и в силу линейной независимости столбцов такое разложение единственно. Контрпример к 2): $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ — строки линейно независимы, а решений бесконечно много. Контрпример к 3): $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ — строки линейно зависимы, а решений нет.

15. 3, Контрпример к 1) и 2) — $f(x) = e^{-x}$, $\varphi(y) = y^2$.

16. 1, Из условия $\det A = 0$ следует, что образ $\operatorname{Im} A$ не совпадает со всем пространством, поэтому для $b \notin \operatorname{Im} A$ система несовместна. Кроме того, однородная система (при $b = 0$) имеет бесконечно много решений, поэтому если решение системы при каком-нибудь b существует, то оно обязательно не единственно.

17. Количество различных собственных значений, очевидно, не превышает n и в то же время не может быть равным n, поскольку тогда число всех (а не только одномерных) инвариантных подпространств конечно. Таким образом, максимальное число различных собственных значений не превышает $n-1$. Пример оператора, имеющего ровно $n-1$ различных собственных значений $Ae_1 = 0$, $Ae_2 = 0$, $Ae_i = ie_i$, $i = 3, \ldots, n$.

18. Например, $f(x) = x$ при $0 < x < 1$, $f(0) = f(1) = 1/2$.

19. Пусть λ — собственное число матрицы A, тогда $\lambda^2 + \lambda = 0$ т. е. $\lambda = 0$ или $\lambda = -1$. Можно проверить, что матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ удовлетворяет условию задачи и имеет собственные значения 0 и -1.

20. Легко проверить, что точка $(0,0)$ является предельной. Других предельных точек нет: любая точка множества M является изолированной, и любая точка, не принадлежащая M и не совпадающая с $(0,0)$, удалена на положительное расстояние от M.

2 Вступительный экзамен 2001 г.

Письменный экзамен в 2001 г. состоял из решения трех задач по математическому анализу и линейной алгебре и ответов на тестовые вопросы, требующие ответа «да» или «нет». Продолжительность экзамена 4 часа, максимальная оценка 12 баллов.

Правила оценивания экзамена были следующие: Для каждой задачи указывалось максимальное число очков, которое можно получить за ее решение. Правильные ответы на тестовые вопросы оценивались в одно очко, неправильные — в минус одно очко, отсутствие ответа — ноль очков.

Число баллов за экзамен определялось суммой очков, набранных при решении задач и ответах на тестовые вопросы.

2.1 Задачи

Задача 1. *(10 очков)* На плоскости xOy задана фигура F, состоящая из двух полукругов радиуса 1 с центрами в точках $(2, 1)$ и $(5, 1)$ (см. рисунок 3).

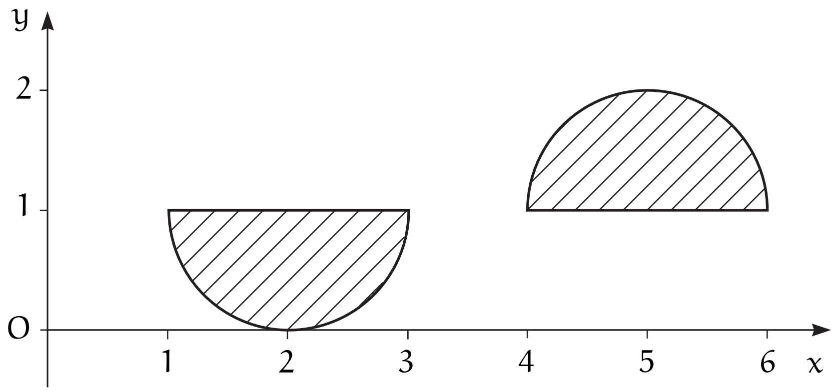


Рис. 3. Фигура F

Функция $f(t)$ определена следующим образом:

$$f(t) = \{\text{площадь пересечения фигуры } F \text{ с полуплоскостью } x \leqslant t\}.$$

Исследовать функцию $f(t)$, построить ее график и график ее производной.

Задача 2. *(15 очков)* Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{2n})$. Исследовать равномерную сходимость этого ряда на отрезке $[0, 1]$.

Задача 3. *(20 очков)* Пусть A — ортогональная, а I — единичная матрицы нечетного порядка n, причем матрица $I + A$ невырождена. Найти собственные числа блочной матрицы

$$B = \begin{pmatrix} A & I \\ I & A \end{pmatrix}$$

порядка $2n$.

2.2 Тестовые вопросы

1. Числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел.

а) при любом натуральном k последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $b_n = \dfrac{1}{k+1}\sum\limits_{i=n}^{n+k} a_i$, сходится;

Да Нет

б) последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $b_k = a_{2k}^* + a_{2k+1}^*$ и $\{a_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ получена из $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ некоторой перестановкой членов, сходится;

Да Нет

в) последовательность $\{\sqrt[2n+1]{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится;

Да Нет

г) если последовательность $\{a_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна, то и последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна;

Да Нет

д) последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $b_n = (-1)^n a_n a_{2n} a_{3n}$, сходится.

Да Нет

2. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

а) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая кусочно-линейная функция $\varphi(x)$, что $f(x) < \varphi(x) < f(x) + \varepsilon$ для всех $x \in [a, b]$;

Да Нет

б) каковы бы ни были пять точек $x_1, \ldots, x_5 \in [a, b]$, найдется такое $y \in [a, b]$, что $f(y) = \dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5} f(x_i)$;

Да Нет

в) если $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $f(a) \cdot f(b) = 0$, то найдется такое $\xi \in [a, b]$, что $f'(\xi) = 0$;

Да Нет

г) множество всех точек x из $[a, b]$, таких что $f(x) \geqslant \dfrac{f(a) + f(b)}{2}$, есть отрезок;

Да Нет

д) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что если $x_1, x_2 \in [a, b]$ и $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$;

Да Нет

3. Пусть M — непустое множество в $\mathbf{R}^k$, не совпадающее с $\mathbf{R}^k$.

а) множество M имеет хотя бы одну предельную точку;

Да Нет

б) множество граничных точек M непусто;

Да Нет

в) множество внутренних то чек M непусто;

Да Нет

г) любая предельная точка множества M является его граничной точкой;

Да Нет

д) любая граничная точка множества M является его предельной точкой.

Да Нет

4. Числовая функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b).

а) функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$;

Да Нет

б) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;

Да Нет

в) функция $f(x)$ непрерывна в каждой внутренней точке отрезка $[a, b]$;

Да Нет

г) если у функции $f(x)$ существуют односторонние производные в точках a и b, то $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;

Да Нет

д) если у функции $f(x)$ существуют односторонние производные в точках a и b, то $f(x)$ достигает максимума на отрезке $[a, b]$, и производная в точках максимума равна нулю.

Да Нет

5. Известно, что точка a является предельной для каждого из множеств A и B в $\mathbf{R}^2$.

а) точка a является граничной для A и для B;

Да Нет

б) точка a принадлежит пересечению замыканий A и B;

Да Нет

в) точка a является предельной для пересечения множеств A и B;

Да Нет

г) точка a является предельной для объединения множеств A и B.

Да Нет

6. В векторном пространстве V заданы две системы векторов $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{y_1, \ldots, y_m\}$. Обозначим через $\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathscr{L}(y_1, \ldots, y_m)$ линейные оболочки систем векторов. Пусть система $\{x_1, \ldots, x_n\}$ линейно независимая.

а) если $\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathscr{L}(y_1, \ldots, y_m)$, то $m \geqslant n$;

Да Нет

б) если $n > m$, то $\mathscr{L}(y_1, \ldots, y_m) \subset \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n)$;

Да Нет

в) если $n = m$ и система $\{y_1, \ldots, y_m\}$ линейно зависимая, то $\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathscr{L}(y_1, \ldots, y_m)$;

Да Нет

г) если $\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathscr{L}(y_1, \ldots, y_m)$ и система $\{y_1, \ldots, y_m\}$ линейно зависимая, то $m \neq n$;

Да Нет

д) если $\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n) = \mathscr{L}(y_1, \ldots, y_m)$ и $m \neq n$, то система $\{y_1, \ldots, y_m\}$ линейно зависимая.

Да Нет

7. Известно, что произведение двух матриц BC является квадратной невырожденной матрицей.

а) обе матрицы B и C квадратные и невырожденные;

Да Нет

б) матрица CB является квадратной и невырожденной;

Да Нет

в) строки матрицы B линейно независимы;

Да Нет

г) столбцы матрицы B линейно независимы;

Да Нет

д) система $Cx = b$ имеет решение при любой правой части b;

Да Нет

е) система $Cx = b$ при любой правой части b имеет не более одного решения.

Да Нет

8. Пусть A и B — матрицы размера $m \times n$ и матрица $A^T B$ — симметричная положительно определенная (A^T — транспонированная к A матрица).

а) $n \geqslant m$;

Да Нет

б) A и B имеют одинаковый ранг;

Да Нет

в) матрица BA^T имеет ранг m;

Да Нет

г) матрица BA^T имеет m линейно независимых собственных векторов;

Да Нет

д) матрица BA^T невырождена.

Да Нет

9. Известно, что $A + A^2 = 0$, где A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 1$.

а) A — проектор;

Да Нет

б) пространство $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму ядра и образа матрицы A;

Да Нет

в) $A = 0$ или $A = -I$;

Да Нет

г) число 0 и число 1 оба являются собственными числами матрицы A;

Да Нет

д) если $\lambda = 0$ не является собственным числом матрицы A, то существует $z \neq 0$, такой что $Az + z = 0$.

Да Нет

2.3 Решения задач

Решение задачи 1. Рассмотрим функцию $g(t)$, определенную следующим образом:

$$g(t) = \{\text{длина отрезка пересечения фигуры } F \text{ и прямой } x = t\} =$$
$$= \begin{cases} \sqrt{1-(t-2)^2}, & \text{при } 1 \leqslant t \leqslant 3, \\ \sqrt{1-(t-5)^2}, & \text{при } 4 \leqslant t \leqslant 6, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

График функции $g(t)$ имеет вид (см. рис. 4)

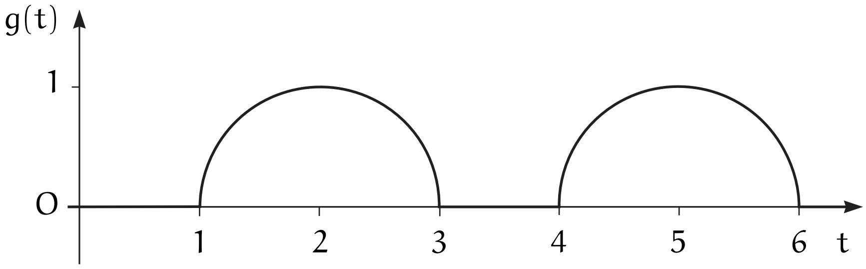


Рис. 4. График функции $g(t)$

При таком выборе $g(t)$ функция $f(t)$ равна

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x)dx.$$

Функция $g(t)$ непрерывна на $\mathbf{R}$, следовательно, $f(t)$ всюду *дифференцируема* на $\mathbf{R}$, и $f'(t) = g(t)$ при всех t. Таким образом, приведенный на рисунке 4 график является и графиком функции $f'(t)$.

Исследуем функцию $f(t)$.

Так как $g(t) \geqslant 0$ при всех $t \in \mathbf{R}$, то $f(t)$ — *неубывающая* на всем $\mathbf{R}$ функция (следовательно, не имеет строгих экстремумов).

Заметим, что так как $g(t) = 0$ при $t \in (-\infty, 1] \cup [3, 4] \cup [6, +\infty)$, то на каждом из множеств $(-\infty, 1]$, $[3, 4]$ и $[6, +\infty)$ функция $f(t)$ *постоянна*. При этом на $(-\infty, 1]$ она равна 0, на $[3, 4]$ — площади одного полукруга, то есть $\pi/2$, на $[6, +\infty)$ функция $f(t)$ равна π.

Проанализируем поведение функции $f(t)$ при $t \in (1, 3)$ и $t \in (4, 6)$. Так как $g(t) > 0$ при $t \in (1, 3)$ и $t \in (4, 6)$, то на этих двух интервалах $f(t)$ строго возрастает.

Исследуем $f(t)$ на выпуклость и вогнутость при $t \in [1, 3]$ и $t \in [4, 6]$. Промежутки неубывания и невозрастания $f'(t) = g(t)$:

1. $t \in (1, 2)$ — $f'(t)$ строго возрастающая;
2. $t \in (2, 3)$ — $f'(t)$ строго убывающая;
3. $t \in (4, 5)$ — $f'(t)$ строго возрастающая;
4. $t \in (5, 6)$ — $f'(t)$ строго убывающая.

Следовательно, при $t \in (1,2)$ и $t \in (4,5)$ функция $f(t)$ является строго выпуклой, при $t \in$ $\in (2,3)$ и $t \in (5,6)$ $f(t)$ является строго вогнутой. Точки 2 и 5 являются точками перегиба.

График функции $f(t)$ изображен на рисунке 5.

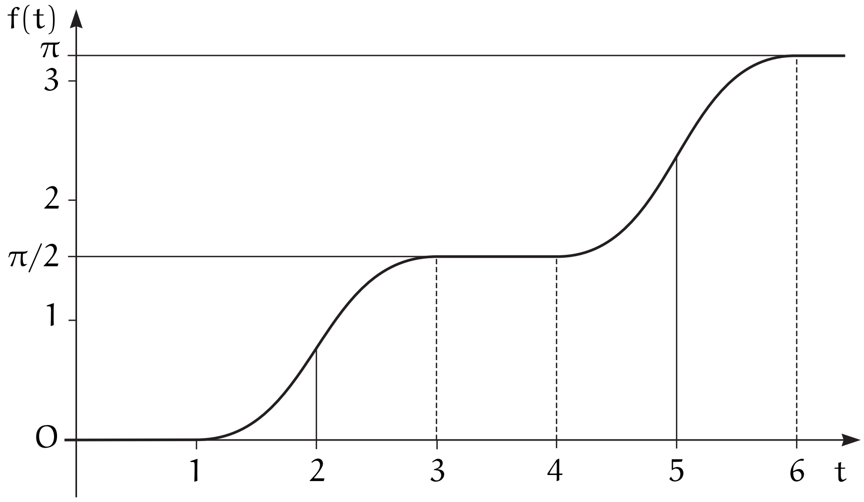


Рис. 5. График функции $f(t)$

Замечание. Для построения графика $g(t)$, вообще говоря, необязательно вводить аналитическое выражение (1). Можно использовать геометрические свойства фигуры F и определение $g(t)$.

Замечание. Точки интервалов постоянства функции формально подходят под определение как локального максимума, так и локального минимума. Точки 1 и 4 являются точками локального минимума, а точки 3 и 6 — точками локального максимума. Впрочем, при некоторых формах определения перегиба точки 1, 3, 4 и 6 могут трактоваться и как точки перегиба.

Решение задачи 2. Если $|x| < 1$, то ряд сходится как сумма двух бесконечно убывающих геометрических прогрессий. Если $|x| > 1$, то $|x^n - x^{2n}| = |x|^n|1-x|^n \to \infty$ при $n \to \infty$, и ряд расходится, так как общий член ряда не стремится к нулю. При $x = -1$ ряд расходится, так как $x^n - x^{2n}$ при нечетных n равны -2, и значит не выполнено необходимое условие сходимости — стремление к нулю общего члена ряда. При $x = 1$ ряд сходится, так как все члены ряда равны нулю. Итак область сходимости данного ряда — полуинтервал $(-1, 1]$.

На отрезке $[0,1]$ ряд не сходится равномерно. Действительно, исследовав поведение функции $u_n(x) = x^n - x^{2n}$ на отрезке $[0,1]$, можно показать, что она достигает максимума в точке $x_n = 1/\sqrt[n]{2}$ и при этом $u_n(x_n) = 1/4$. Таким образом, общий член ряда не стремится к нулю *равномерно* на $[0,1]$, то есть не выполнено необходимое условие равномерной сходимости ряда.

Отсутствие равномерной сходимости можно доказать другим способом.

Обозначим $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{2n})$, $x \in [0, 1]$. Используя формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем, что $S(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ при $0 \leqslant x < 1$, и $S(1) = 0$. Таким образом, сумма ряда *разрывна* в точке $x = 1$, что в силу теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных слагаемых, означает отсутствие равномерной сходимости.

Ответ. Ряд сходится на полуинтервале $(-1, 1]$. На отрезке $[0, 1]$ ряд не сходится равномерно.

Решение задачи 3. Так как матрица $I + A$ невырожденная, то число -1 не является собственным для матрицы A. В то же время матрица A имеет вещественное собственное число, поскольку ее порядок нечетный. Но ортогональная матрица может иметь в качестве собственных чисел только $+1$ и -1. Таким образом, у матрицы A имеется, и притом *единственное* собственное число 1. Обозначим через z соответствующий собственный вектор, то есть $Az = z$ и $z \neq 0$.

Пусть λ — собственное число матрицы B, а $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — соответствующий ему собственный вектор, то есть $Ax_1 + x_2 = \lambda x_1$ и $x_1 + Ax_2 = \lambda x_2$. Тогда $x_1 = \lambda x_2 - Ax_2$ и $(A^2 - 2\lambda A + (\lambda^2 - 1)I)x_2 = 0$. Но $x_2 \neq 0$ (иначе $x_1 = 0$ и $x = 0$). Поэтому матрица

$$A^2 - 2\lambda A + (\lambda^2 - 1)I = (A - (\lambda + 1)I)(A - (\lambda - 1)I)$$

вырожденная. Следовательно, по крайней мере один из сомножителей является вырожденным.

Если $A - (\lambda + 1)I$ — вырожденная матрица, то $\lambda + 1$ является собственным числом матрицы A, то есть $\lambda + 1 = 1$ и $\lambda = 0$. Если положить $x_2 = z$ и $x_1 = 0 \cdot z - Az = -z$, то $Bx = 0$, так что число $\lambda = 0$ действительно собственное число матрицы B.

Если $A - (\lambda - 1)I$ — вырожденная матрица, то аналогично имеем $\lambda - 1 = 1$ и $\lambda = 2$. Положив $x_2 = z$ и $x_1 = 2z - Az = z$, получим $Bx = 2x$, то есть $\lambda = 2$ — собственное число матрицы B.

Ответ. Собственными числами матрицы B являются числа 0 и 2.

2.4 Ответы на тестовые вопросы

1. а) Да, б) Да, в) Нет, г) Нет, д) Нет.

2. а) Да, б) Да, в) Нет, г) Нет, д) Да.

3. а) Нет, б) Да, в) Нет, г) Нет, д) Нет.

4. а) Нет, б) Нет, в) Да, г) Да, д) Нет.

5. а) Нет, б) Да, в) Нет, г) Да.

6. а) Да, б) Нет, в) Нет, г) Да, д) Да.

7. а) Нет, б) Нет, в) Да, г) Нет, д) Нет, е) Да.

8. а) Нет, б) Да, в) Нет, г) Да, д) Нет.

9. а) Нет, б) Да, в) Нет, г) Нет, д) Да.

3 Вступительный экзамен 2002 г.

Экзамен по математике проводился в форме теста. Продолжительность экзамена 4 часа, максимальная оценка 12 баллов.

Тест состоял из трех разделов (частей), различающихся уровнем сложности. В пределах каждого уровня вопросы объединялись в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «да» или «нет».

Правила оценивания теста были следующие:

Для вопросов 1-го уровня сложности

* за правильный ответ абитуриент получал «+1» очко,
* за отсутствие ответа — «0» очков,
* за неправильный ответ — «−1» очко.

Для вопросов 2-го уровня сложности

* за правильный ответ абитуриент получал «+2» очка,
* за отсутствие ответа — «0» очков,
* за неправильный ответ — «−2» очка.

Для вопросов 3-го уровня сложности

* за правильный ответ абитуриент получал «+3» очка,
* за отсутствие ответа — «0» очков,
* за неправильный ответ — «−3» очка.

Число баллов за тест определялось суммой очков, набранных при ответах на вопросы теста.

3.1 Тест

3.1.1 Первая группа

1. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на $[a, b]$, и $g(x) = \sup\limits_{z\in[x,b]} f(z)$.

а) функция $g(x)$ является монотонной на $[a, b]$;

Да Нет

б) если $f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$, то $g(x)$ является непрерывной на $[a, b]$;

Да Нет

в) если $f(x)$ является дифференцируемой на $[a, b]$, то $g(x)$ является дифференцируемой на $[a, b]$;

Да Нет

г) если $g(x)$ является строго вогнутой на $[a, b]$, то $f(x)$ тоже является строго вогнутой на $[a, b]$.

Да Нет

2. Числовая функция $f(x)$ задана на интервале (a, b) и дифференцируема на нем.

а) если $f(x)$ является равномерно непрерывной на (a, b), то $f'(x)$ является ограниченной на (a, b);

Да Нет

б) если $f'(x)$ является непрерывной на (a, b), то $f(x)$ является ограниченной на (a, b);

Да Нет

в) если $f'(x)$ является ограниченной на (a, b), то $f(x)$ является равномерно непрерывной на (a, b);

Да Нет

г) если $f(x)$ является ограниченной на (a, b), то $f(x)$ является равномерно непрерывной на (a, b).

Да Нет

3. Пусть G — открытое, F — замкнутое множества в $\mathbf{R}$ и некоторая точка x принадлежит границам обоих множеств.

а) множество F не является открытым;

Да Нет

б) точка $x \in F \setminus G$;

Да Нет

в) точка x является предельной для G;

Да Нет

г) точка x является предельной для F.

Да Нет

4. Пусть A — квадратная матрица порядка n и A^T — транспонированная к ней. Обозначим через L_1 и L_2 подпространства решений систем $Ax = 0$ и $A^T x = 0$, соответственно. Тогда а) подпространства L_1 и L_2 имеют одинаковую размерность;

Да Нет

б) если L_1 является ортогональным дополнением к L_2 (при стандартном скалярном произведении в $\mathbf{R}^n$), то n является четным;

Да Нет

в) если $L_1 = L_2$, то матрица A является симметричной;

Да Нет

г) если при некоторой правой части b система $Ax = b$ не имеет решения, то в L_2 имеется ненулевой вектор.

Да Нет

5. Дан линейный оператор A в евклидовом пространстве E размерности n. Тогда

а) если $A^2 = A$, то $E = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A$ (прямая сумма), где $\operatorname{Im} A$ — образ оператора A, $\operatorname{Ker} A$ — ядро оператора A;

Да Нет

б) если $A^2 = A$ и оператор A самосопряженный (симметричный), то $\operatorname{Im} A$ является ортогональным дополнением $\operatorname{Ker} A$;

Да Нет

в) если оператор A самосопряженный (симметричный) и $n = 3$, то многочлен $p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2$ может быть его характеристическим многочленом;

Да Нет

г) если оператор A самосопряженный (симметричный) и $n = 3$, то многочлен $p(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda - 2$ может быть его характеристическим многочленом;

Да Нет

3.1.2 Вторая группа

6. Числовая функция $f(x)$ задана на непустом компактном множестве $K \subset \mathbf{R}$ и непрерывна на нем.

а) существует такая точка $x_0 \in K$, что для любой точки $x \in K$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$;

Да Нет

б) если $x_1, x_2 \in K$, $f(x_1) < f(x_2)$ и $c \in (f(x_1), f(x_2))$, то существует точка $x \in K$, такая что $f(x) = c$;

Да Нет

в) множество $f(K)$ замкнуто;

Да Нет

г) функция $f(x)$ равномерно непрерывна на K;

Да Нет

д) если функция $f(x)$ дифференцируема в каждой внутренней точке множества K и в каждой точке производная равна нулю, то $f(x)$ постоянна.

Да Нет

7. Известно, что $f(x)$ строго убывает и непрерывна на $M = [a, b]$.

а) существует обратная к $f(x)$ функция $f^{-1}(y)$, определенная на $N = [f(b), f(a)]$;

Да Нет

б) функция $f^{-1}(y)$ — обратная к $f(x)$ — равномерно непрерывна на N;

Да Нет

в) существует такая $f(x)$, не являющаяся всюду дифференцируемой на (a, b), что $f^{-1}(y)$ — дифференцируемая на $(f(b), f(a))$;

Да Нет

г) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая монотонная кусочно-линейная $\varphi(y)$, что для всех $y \in N$ выполняется неравенство $0 < \varphi(y) - f^{-1}(y) < \varepsilon$;

Да Нет

д) существует такая строго выпуклая $f(x)$, что и обратная к ней $f^{-1}(y)$ тоже будет строго выпуклой.

Да Нет

8. Квадратная матрица A представлена в виде $A = BC$, где B и C — прямоугольные матрицы. Тогда

а) если матрица B имеет линейно независимые строки, а матрица C имеет линейно независимые столбцы, то матрица A невырожденная;

Да Нет

б) если матрица B имеет линейно независимые столбцы, а матрица C имеет линейно независимые строки, то матрица A невырожденная;

Да Нет

в) если у матрицы B строки линейно независимые, то матрицы A и C имеют одинаковый ранг;

Да Нет

г) если у матрицы C строки линейно независимые, то матрицы A и B имеют одинаковый ранг;

Да Нет

д) если у матрицы A линейно зависимые строки, то у матрицы B или у матрицы C линейно зависимые столбцы.

Да Нет

9. Пусть A — произвольная квадратная вещественная матрица порядка n. Тогда

а) если $x^T A x = 0$ только при $x = 0$, то матрица $(A + A^T)$ положительно или отрицательно определенная;

Да Нет

б) если $\varphi(\lambda) = \det(\lambda A + (1-\lambda)A^T)$, то у функции φ внутри интервала $(0, 1)$ есть точка экстремума;

Да Нет

в) если (при стандартном скалярном произведении в $\mathbf{R}^n$) матрица $\frac{1}{2}(A - A^T)$ является ортогональным проектором, то матрица A симметричная;

Да Нет

г) существует такая ортогональная матрица Q, что для матрицы $B = Q^T A Q$ с элементами b_{ij} выполняются равенства $b_{ij} = -b_{ji}$ при $i \neq j$;

Да Нет

д) если матрица $(A + A^T)$ положительно определенная, то у матрицы A все (вещественные) собственные числа положительные.

Да Нет

3.1.3 Третья группа

10. Дана функция

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i}$$

и множество

$$M = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) : x_i > 0, i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 1 \right\},$$

где $a_i > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ — заданные числа. Отсюда следует, что

а) функция $f(x)$ достигает минимума на множестве M;

Да Нет

б) функция $f(x)$ достигает максимума на множестве M;

Да Нет

в) если у функции $f(x)$ есть точки максимума или минимума на множестве M, то хотя бы в одной такой точке все частные производные $f(x)$ равны нулю;

Да Нет

г) точка $x_i = \frac{a_i^2/b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$, $i = 1, \ldots, n$, является точкой локального максимума функции $f(x)$ на множестве M;

Да Нет

д) точка $x_i = \frac{\sqrt{a_i/b_i}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i b_i}}$, $i = 1, \ldots, n$, является точкой минимума функции $f(x)$ на множестве M.

Да Нет

11. Интегральная кривая $x = \varphi(t)$ для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - 7tx + 12t^2}{t^2}$$

проходит через точку $(t_0, x_0) = (1, 4)$ и служит графиком его максимального (непродолжаемого) решения.

а) областью определения функции $\varphi(t)$ служит вся числовая ось $(-\infty, +\infty)$, за исключением точки $t = 0$;

Да Нет

б) интегральная кривая имеет наклонную асимптоту;

Да Нет

в) интегральная кривая имеет вертикальную асимптоту;

Да Нет

г) максимальное решение $\varphi(t)$ имеет одну точку локального максимума $t = 2$; при этом $\varphi(2) = 8$;

Да Нет

д) максимальное решение $\varphi(t)$ имеет две точки локального минимума $t = 0$ и $t = \sqrt[4]{3}$; при этом $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(\sqrt[4]{3}) = 3\sqrt[4]{3}$;

Да Нет

е) интегральная кривая имеет две точки перегиба;

Да Нет

ж) множество значений решения $\varphi(t)$ замкнуто.

Да Нет

12. Квадратная матрица третьего порядка $A(\alpha)$, зависящая от вещественного параметра α, трактуется как линейный оператор из $\mathbf{R}^3$ в $\mathbf{R}^3$. Пусть

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad z(\alpha) = \begin{pmatrix} 4+7\alpha \\ 2+3\alpha \\ 1-3\alpha \end{pmatrix}, \qquad X(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно, что столбцы матрицы $X(\alpha)$ являются собственными векторами оператора $A(\alpha)$. Кроме того, при всех α, для которых определен оператор $A(\alpha)$, выполняется равенство $A(\alpha)y = z(\alpha)$. Из приведенных условий следует, что

а) при $\alpha = 1$ существует единственный оператор $A(\alpha)$;

Да Нет

б) при $\alpha = 1$ существует бесконечно много операторов $A(\alpha)$;

Да Нет

в) при $\alpha = 1$ не существует оператора $A(\alpha)$;

Да Нет

г) существует α, при котором оператор $A(\alpha)$ является тождественным оператором;

Да Нет

д) при $\alpha = 0$ оператор $A(\alpha)$ является оператором проектирования на двумерное подпространство;

Да Нет

е) при $\alpha = 0$ оператор $A(\alpha)$ является оператором проектирования на одномерное подпространство;

Да Нет

ж) при $\alpha = -1$ оператор $A(\alpha)$ является оператором проектирования на двумерное подпространство;

Да Нет

з) при $\alpha = -1$ оператор $A(\alpha)$ является оператором проектирования на одномерное подпространство.

Да Нет

3.2 Ответы и решения теста

3.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. а) Да, б) Да, в) Нет, г) Нет.

2. а) Нет, б) Нет, в) Да, г) Нет.

3. а) Да, б) Да, в) Да, г) Нет.

4. а) Да, б) Да, в) Нет, г) Да.

5. а) Да, б) Да, в) Да, г) Нет.

3.2.2 Указания к вопросам второй группы

Задача 6. а) «Да». Следует из теоремы Вейерштрасса.
б) «Нет». Пример: $K = \{0, 1\}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ (компакт не обязательно связен).
в) «Да». Непрерывный образ компакта является компактом.
г) «Да». Это утверждение теоремы Кантора.
д) «Нет». Пример: $K = [0, 1] \cup [2, 3]$, $f(x) = 0$ при $x \in [0, 1]$, $f(x) = 1$ при $x \in [2, 3]$.

Задача 7. а) «Да». Обратная к монотонной непрерывной функции всегда существует и непрерывна.
б) «Да». Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.
в) «Да». Пример: $M = [-1, 1]$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
г) «Да». Воспользовавшись равномерной непрерывностью, можно разбить отрезок на конечное число отрезков, на каждом из которых колебание функции достаточно мало.
д) «Да». Пример: $M = [1, 2]$, $f(x) = 1/x$. (На самом деле, утверждение верно для любой функции, удовлетворяющей поставленным условиям.)

Задача 8. а) «Нет». Пример: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
б) «Нет». Пример: B, C — любые неквадратные.
в) «Нет». Пример из пункта а.
г) «Да». Пусть B — $m \times n$, C — $n \times m$-матрицы. Так как строки матрицы C линейно независимы, то $\operatorname{Im} C = \mathbf{R}^n$. Следовательно, $\operatorname{Im} BC = \operatorname{Im} B$.

д) «Да». Если B и C неквадратные, то у одной из них число столбцов больше, чем их длина. Если квадратные, то по крайней мере одна из них вырожденная.

Задача 9. а) «Да». Если матрица $A + A^T$ не является положительно или отрицательно определенной, то найдется такой вектор $x \neq 0$, что $0 = x^T(A + A^T)x = 2x^TAx$. Противоречие.
б) «Да». $\varphi(0) = \det A = \det A^T = \varphi(1)$ и утверждение следует из теоремы Ролля.
в) «Да». Матрица $\frac{1}{2}(A - A^T)$ кососимметричная. Если она является ортогональным проектором, то она симметричная. Следовательно, $\frac{1}{2}(A - A^T) = 0$. Значит, $A = A^T$.
г) «Да». Если представить матрицу в виде суммы $A = B + C$, где B — симметричная, C — кососимметричная, то Q — матрица, такая, что Q^TBQ диагональная.
д) «Да». Если у матрицы A существует отрицательное собственное число λ, то для соответствующего собственного вектора x выполняется равенство $x^T(A + A^T)x = 2\lambda x^Tx < 0$.

3.2.3 Решения задач третьей группы

Задача 10. Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i} + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i - 1 \right).$$

Дифференцируя ее по x_1, ..., x_n, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -\dfrac{a_i}{x_i^2} + \lambda b_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$x_i^0 = \frac{\sqrt{a_i/b_i}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i b_i}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \lambda^0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i b_i} \right)^2.$$

Матрица вторых производных функции Лагранжа равна

$$\begin{pmatrix} 2a_1/x_1^3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2a_2/x_2^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2a_n/x_n^3 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица положительно определена при всех x, таких, что x_1, ..., $x_n > 0$. Следовательно, функция Лагранжа строго выпукла по x. Значит, точка x^0 является точкой строгого минимума функции Лагранжа. Следовательно, для любой точки $x \in M$ ($x \neq x^0$) справедливо неравенство

$$f(x) = f(x) + \lambda^0 \left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i - 1 \right) = L(x, \lambda^0) > L(x^0, \lambda^0) = f(x_0) + \lambda^0 \left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i^0 - 1 \right) = f(x^0),$$

и найденная стационарная точка является точкой минимума (вопросам а) и д) соответствует ответ «да»).

Так как других стационарных точек нет, то вопросам б) и г) соответствуют ответы «нет».

Производная функции $f(x)$ равна $(-a_1/x_1^2, \ldots, -a_n/x_n^2)$. Она не равна нулю ни при каком $x \in M$. Значит, ответ на вопрос в) — «нет».

Задача 11. Правая часть дифференциального уравнения определена на всей плоскости (t, x) за исключением точек вида $(0, x)$. В то же время, любое максимальное решение имеет областью определения некоторый отрезок J, так что $J \subset (0, +\infty)$ (пункт а) — «нет»).

Заданное дифференциальное уравнение является однородным. Поэтому сделаем замену $x = ty$. Тогда

$$t\frac{dy}{dt} = (y-2)(y-6),$$

причем при $t_0 = 1$ должно быть $y_0 = 4$. Поэтому постоянные решения $y = 6$ или $y = 2$ при $t \in (0, +\infty)$ не удовлетворяют начальным условиям. Так как выполнены условия теоремы существования и единственности, а $y(1) = 4$, то при всех $t \in J$ должно быть $2 < y(t) < 6$. Тогда

$$\frac{dt}{t} = \frac{dy}{(y-6)(y-2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{y-6} - \frac{dy}{y-2}\right),$$

или

$$\ln t = \frac{1}{4}\ln\frac{|y-6|}{|y-2|} = \frac{1}{4}\ln\frac{6-y}{y-2},$$

так что

$$y(t) = 2 + \frac{4}{1+t^4}, \;\; x = \varphi(t) = 2t\left(1 + \frac{2}{1+t^4}\right).$$

Область определения $J = (0, +\infty)$. Так как $\varphi(t)/t \to 2$ и $\varphi(t) - 2t \to 0$ при $t \to +\infty$, то имеется одна наклонная асимптота $x = 2t$ (при $t \to +\infty$) (пункт б) — «да»). При $t \to 0$ $\varphi(t) \to 0$, так что вертикальной асимптоты нет (пункт в) — «нет»).

Так как

$$\varphi'(t) = \frac{2(t^4-1)(t^4-3)}{(1+t^4)^2},$$

то стационарными точками функции $\varphi(t)$ являются точки $t = 1$ и $t = \sqrt[4]{3}$ (пункт г) — «нет»). При $t < 1$ и $t > \sqrt[4]{3}$ производная $\varphi'(t) > 0$, а при $t \in (1, \sqrt[4]{3})$ производная $\varphi'(t) < 0$. Поэтому точка $t = 1$ является точкой локального максимума, а точка $t = \sqrt[4]{3}$ — точкой локального минимума.

Точка $t = 0$ не входит в область определения решения $\varphi(t)$, так что есть только одна точка локального минимума (пункт д) — «нет»).

Найдем точки перегиба. Поскольку

$$\varphi''(t) = (3t^4 - 5)\frac{16t^3}{(1+t^4)^3},$$

то единственной точкой перегиба может служить $t = \sqrt[4]{5/3}$ (пункт е) — «нет»). Наконец, $\inf\{\varphi(t) \mid t \in (0, +\infty)\} = 0$, но он не достигается (пункт ж) — «нет»).

Задача 12. При $\alpha = 1$ столбцы матрицы $X(\alpha)$ линейно зависимые: второй является суммой первого и третьего. Так как это собственные векторы, то они соответствуют одному собственному числу λ. Вектор y также линейно выражается через столбцы матрицы $X(1)$. Поэтому он тоже является собственным вектором, соответствующим числу λ. Поэтому

$$z(1) = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = A(1)y = \lambda y = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это векторное равенство не выполняется ни при каком числе λ. Поэтому пунктам а) и б) соответствует «нет», а пункту в) — «да». Пункту г) соответствует ответ «нет», так как для тождественного $A(\alpha)$ должно было бы выполняться равенство $y = z(\alpha)$, невозможное ни при каком α.

Если $\alpha = 0$ или -1, то столбцы матрицы $X(\alpha)$ линейно независимые ($\det X(\alpha) = -\alpha^3 + 2\alpha - 1 \neq 0$) и существуют обратные матрицы

$$X(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X(-1)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — собственные числа оператора $A(\alpha)$, зависимость которых от α подразумевается, и

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

По определению собственных чисел и собственных векторов $A(\alpha)X(\alpha) = X(\alpha)\lambda$, т. е. $A(\alpha) = X(\alpha)\lambda X(\alpha)^{-1}$, $z(\alpha) = A(\alpha)y = X(\alpha)\lambda X(\alpha)^{-1}y$, или $\lambda X(\alpha)^{-1}y = X(\alpha)^{-1}z(\alpha)$. Для случаев $\alpha = 0$ и $\alpha = -1$, соответственно, получаем

$$z(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \cdot 1 = 1, \quad \lambda_2 \cdot 2 = 2, \quad \lambda_3 \cdot (-1) = 0;$$

$$z(-1) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \cdot 8 = 8, \quad \lambda_2 \cdot 6 = 0, \quad \lambda_3 \cdot 2 = 2.$$

При $\alpha = 0$ собственные числа $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$, т. е. оператор $A(0)$ является проектором на двумерное подпространство, натянутое на первые два столбца матрицы $X(0)$. Проектирование осуществляется параллельно одномерному подпространству, натянутому на ее третий столбец, т. е. параллельно первой координатной оси. Аналогично, при $\alpha = -1$ получаем, $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ и $\lambda_2 = 0$, т. е. $A(-1)$ снова является проектором на двумерное подпространство. Таким образом, пунктам д) и ж) соответствует ответ «да», а пунктам е) и з) — «нет».

4 Вступительный экзамен 2003 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

4.1 Тест

4.1.1 Первая часть теста

1. Наибольшее значение функции $x^2 - y^2$ на множестве $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$ достигается только в точках

A $(0, 1), (-1, 0)$

B $(0, 1), (0, -1)$

C $(1, 0), (0, 1)$

D $(-1, 0), (1, 0)$

E $(0, -1), (1, 0)$

2. Дано множество $M = \left\{1 + \dfrac{n}{n+1}\colon n = 1, 2, \dots\right\}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. M счетное множество.

II. M имеет только одну предельную точку.

III. M замкнутое множество.

A только I

B только I и II

C только II и III

D I, II и III

E ни одно из утверждений A, B, C, D не является верным

3. Пусть M — множество на вещественной прямой, граница которого пустая. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. M открытое множество.

II. M замкнутое множество.

III. M имеет мощность континуума.

A только I

B только III

C только I и II

D только I и III

E только II и III

4. Дана функция $f(x, y) = x^2 + y^2$ и множество $M = \{(x, y) \colon x^2/2 + y^2 = 1\}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. f достигает наибольшего значения на M в единственной точке.

II. f достигает наименьшего значения на M в единственной точке.

III. В точке (точках), где f достигает наибольшего значения на M, $y = 0$.

A только I

B только III

C только I и II

D только I и III

E　только II и III

5. Максимальное решение задачи Коши $y' = x + \frac{y^2}{x^3}$, где $y(1) = 1$, равно

A　$y = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$

B　$y = x^2, x \in (0, +\infty)$

C　$y = x^3, x \in (-\infty, +\infty)$

D　$y = x^3, x \in (0, +\infty)$

E　решения не существует

6. Множество предельных точек множества $M = \mathbf{Q} \cap (0, 1)$, где $\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел, равно

A　M

B　$M \cap \{0; 1\}$

C　$[0, 1]$

D　$(0, 1)$

E　$[0, 1] \setminus M$

7. Пересечение счетного множества открытых подмножеств вещественной прямой

A　открыто

B　замкнуто

C　не является открытым

D　не является замкнутым

E　утверждения A, B, C, D ложные

8. Линейный оператор A в пространстве $\mathbf{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда число инвариантных подпространств оператора A равно

A　2

B　3

C　4

D　5

E бесконечно много

9. В пространстве $\mathbf{R}^n$ при $n \geqslant 1$ задана система из четырех векторов $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, причем известно, что сумма компонент каждого из векторов системы равна нулю. Тогда

A если система X линейно независимая, то $n > 5$

B если система X линейно зависимая, то $n < 5$

C если $n > 5$, то система X линейно независимая

D если $n < 5$, система X линейно зависимая

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. В пространстве $\mathbf{R}^n$ при $n \geqslant 1$ заданы два подпространства L_1 и L_2 с размерностями n_1 и n_2, соответственно, причем $\mathbf{R}^n = L_1 + L_2$. Тогда

A если $n_1 = n_2$, то n четное

B если $n_1 + n_2 \geqslant n$, то сумма подпространств L_1 и L_2 прямая

C если сумма подпространств L_1 и L_2 прямая, то $n_1 + n_2 < n$

D если сумма подпространств L_1 и L_2 прямая, то их пересечение пустое

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Пусть A и B — матрицы размеров $m \times n$, $m > 1$, $n > 1$, a и b — столбцы длины m, а x — искомый столбец длины n. Тогда

A если обе системы $Ax = a$ и $Bx = b$ совместны, то совместна и система $(A + B)x = (a + b)$

B если обе системы $Ax = a$ и $Bx = b$ совместны, и $n \geqslant 2m$, то (объединенная) система $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ совместна

C если хотя бы одна из систем $Ax = a$ или $Bx = b$ несовместна, то система $(A + B)x = (a + b)$ несовместна

D если $n = m$ и система $Bx = b$ совместна при любой правой части b, то системы $(AB)x = a$ и $Ax = a$ одновременно совместны или одновременно несовместны

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, а через $\det X$ обозначается определитель любой квадратной матрицы X. Тогда

A если $\det A = \det B$, то $\det(A - B) = 0$

B если A и B отличаются друг от друга лишь перестановкой столбцов, то $\det A = \det B$

C если $\det A \neq 0$, то либо $\det B = 0$, либо $\det(AB) \neq 0$

D если $\det(AB) = 0$, то $\det A = 0$ и $\det B = 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Пусть A — линейный оператор, действующий из пространства $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$ при $n > 1$. Через $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$ обозначим ядро и образ оператора A, через A^2 — суперпозицию с самим собой, а через $\operatorname{Im} A^2$ — образ этой суперпозиции. Тогда

A $\operatorname{Im} A^2 = \operatorname{Im} A$

B $\operatorname{Ker} A \neq \operatorname{Im} A$

C если $(\operatorname{Ker} A) \cap (\operatorname{Im} A) = \{0\}$, то $(\operatorname{Ker} A) + (\operatorname{Im} A) = \mathbf{R}^n$

D если $(\operatorname{Ker} A) \cap (\operatorname{Im} A) \neq \{0\}$, то сумма размерностей $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$ меньше n

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A если λ — (вещественное) собственное число матрицы A^2, то $\lambda > 0$

B если у матрицы A имеется инвариантное подпространство, отличное от всего $\mathbf{R}^n$ и от нульмерного подпространства, то у A имеется вещественное собственное число

C существует вырожденная матрица A, не имеющая вещественных собственных чисел

D если матрица A невырожденная и определитель матрицы $(A^2 - 2A + I)$, где I — единичная матрица, равен нулю, то число 2 является собственным для матрицы $(A + A^{-1})$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. Пусть в $\mathbf{R}^n$ введено стандартное скалярное произведение, и две вещественные квадратные матрицы A и B порядка n рассматриваются как операторы в $\mathbf{R}^n$. Тогда

A если $A^2 = A$, то матрица A задает оператор ортогонального проектирования

B если A ортогональная матрица, то $A^2 = A$

C если A симметричная матрица и ее характеристический многочлен имеет вид $(-1)^n \lambda^k (\lambda - 1)^{n-k}$, где k — целое и $0 \leqslant k \leqslant n$, то матрица A задает оператор ортогонального проектирования

D если матрицы A и B задают операторы ортогонального проектирования, то матрица (AB) задает оператор проектирования

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Пусть A и B — вещественные квадратные матрицы порядка n, причем A — симметричная. Тогда

A если для некоторого $x \in \mathbf{R}^n$ оказалось, что $x^T A x = 0$, и A невырожденная, то $Ax = 0$

B если $x^T B x = 0$ при всех $x \in \mathbf{R}^n$, матрица B нулевая

C если матрица A положительно определенная, то и матрица $B^T A B$ положительно определенная

D если матрица B тоже симметричная и обе матрицы A и B положительно полуопределенные, то квадратичная форма $x^T A B x$ положительно полуопределена

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(0, 8)$, и $f(1) = 5$, $f(3) = -2$, $f(6) = 10$. Какие из следующих утверждений (I, II, III, IV) верны?

I. Функция $f(x)$ имеет в интервале $(0, 8)$ не более одного нуля.

II. График функции $f(x)$ имеет по крайней мере одну горизонтальную касательную.

III. Существует число b, $1 < b < 3$, такое, что $f(b) = 6$.

IV. Существует число c, $3 < c < 8$, такое, что $f(c) = 8$.

A только I и II

B только I и III

C только II и IV

D только II, III и IV

E ни одно из утверждений I—IV не является верным

18. Интеграл $\int_0^2 xe^x dx$ равен

A 8

B $e^2 + 1$

C $2e + 1$

D $\ln 2$

E $e^2 - 1$

19. Неявная функция $y = y(x)$ определяется как решение уравнения $x^2 + 2xy + 3x + y^3 = 7$. Тогда производная $\dfrac{dy}{dx}(1)$ равна

A $-3/7$

B $-7/5$

C $5/7$

D 0

E $2/9$

20. Предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$ равен

A $\quad 1$

B $\quad 1/e$

C $\quad 1/e^2$

D $\quad 1/\sqrt{e}$

E $\quad 1/2e$

21. Наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^4/4 - x^3 - x^2/2 + 3x - 2$ на отрезке $[-2, 3]$ равны, соответственно

A $\quad 1$ и $-13/4$

B $\quad 2$ и $-17/4$

C $\quad 2$ и $-1/4$

D $\quad 5/4$ и $-13/4$

E $\quad 3/4$ и $-13/4$

22. Уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{14x-5}{3x-2}$ в точке $(1, 9)$ есть

A $\quad 13x - y = 4$

B $\quad x + 13y = 118$

C $\quad 13x + y = 22$

D $\quad 2x + 3y = 25$

E $\quad x - 13y = 116$

23. К графику функции $y = 1/x^2$ проведена касательная в точке $(x_0, 1/x_0^2)$. Площадь треугольника, образованного касательной и осями координат, равна 3. Тогда x_0 равно

A $\quad 1/2$

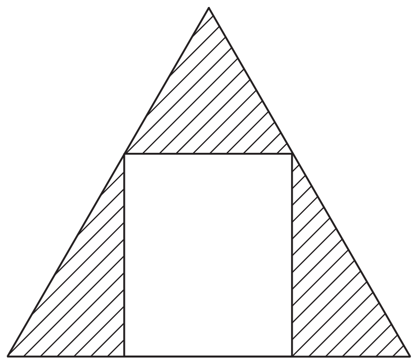
B $\quad 3/4$

C $\quad 1$

D $\quad 5/4$

E $\quad 3/2$

24. Прямоугольник вписан в равносторонний треугольник со стороной 1.



Наименьшее значение площади заштрихованной фигуры равно

A $1/8$

B $\sqrt{3}/8$

C $1/4$

D $\sqrt{6}/8$

E $3\sqrt{3}/8$

25. Диаметр круга уменьшается со скоростью, равной площади этого круга в данный момент времени. Если в момент времени $t = 0$ диаметр равен 1, то в момент t диаметр $D(t)$ равен

A $e^{-\pi t/4}$

B $1/(\pi t + 1)$

C $e^{-\pi t^2/4}$

D $4/(\pi t + 4)$

E $4/(t + 4)$

26. Предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ равен

A 0

B 1

C $1/2$

D $-1/2$

E не существует

27. Функция $f(x)$ задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Тогда предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\cos x}$ равен

A -1

B $-1/2$

C 0

D 1

E не существует

28. Неопределенный интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ равен

A $\ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + C$

B $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} + C$

C $\dfrac{1}{3}\cos^3 x + C$

D $\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{2}\sin(2x)\right) + C$

E $\dfrac{1}{2}(x + \cos^2 x - \sin^2 x) + C$

29. Функция $g(x)$ задана формулой

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1+\sin^2(1/x)}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $g(x)$ непрерывна в точке 0.

II. Функция $g(x)$ имеет непрерывную первую производную в точке 0.

III. Функция $g(x)$ имеет непрерывную вторую производную в точке 0.

A только I

B только II

C только I и II

D только I и III

E $\quad$ I, II, и III

30. Какова площадь фигуры, заданной неравенствами $x^2 + y^2/3 \leqslant 1$ и $|x| + |y|/\sqrt{3} \geqslant 1$ на координатной плоскости?

A $\quad 3\pi - 3$

B $\quad 3\pi - 6$

C $\quad \sqrt{3}(\pi - 1)$

D $\quad \sqrt{3}(\pi - 2)$

E $\quad 3\pi^2 - 6$

31. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывно дифференцируема на $(0, +\infty)$, и пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x$ не существует. Для каких из следующих утверждений (I, II, III) можно подобрать функцию $f(x)$, такую что соответствующее утверждение верно по отношению к этой функции?

I. Функция $g(x) = |f(x)|$ ограничена сверху.

II. График функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту.

III. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ существует.

A $\quad$ только I

B $\quad$ только II

C $\quad$ только III

D $\quad$ только I и II

E $\quad$ нельзя ни для одного

32. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x}{\sin(x^3)}$ равен

A $\quad 1/6$

B $\quad 1/3$

C $\quad 1/2$

D $\quad 1$

E $\quad$ не существует

33. Наименьшее значение функции $f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + xy - 3x + 3y - 15$ равно

A $\quad -16$

B -14

C -10

D -2

E 2

34. Пусть $a, b > 0$. Тогда предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ равен

A $\sqrt{ab}$

B $\dfrac{a+b}{2}$

C 1

D ab

E $(\ln a+\ln b)^2$

35. Решением уравнения

$$\ln x = \int_1^2 \ln s\, ds$$

является число

A $3/2$

B $e/2$

C $e^2/6$

D $4/e$

E $\varnothing$

36. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на $[0,1]$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ непрерывна на $[0,1]$.

II. Функция $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ дифференцируема на $(0,1)$.

III. Функция $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ равномерно непрерывна на $[0,1]$.

A только I

B только II

C только I и III

D I, II и III

E ни одно из утверждений (I, II, III) не является верным

37. Интеграл $\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$ равен

A π

B $\pi/4$

C $1-\pi/4$

D другому значению

E не существует

38. Степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$ сходится на всей вещественной прямой к функции

A e^x

B xe^x

C e^{x-1}

D к другой функции

E расходится при $|x|>0$

39. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на вещественной прямой. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на вещественной прямой.

II. Образ $f(G)$ любого открытого множества G — открытое множество.

III. Прообраз $f^{-1}(G)$ любого открытого множества G — открытое множество.

A только I

B только II

C только III

D только I и II

E только I и III

40. Функция $f(x)$ непрерывна на множестве $[1,+\infty)$, дифференцируема на $(1,+\infty)$, и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве $[1, +\infty)$.

II. Если функция $f(x)$ ограничена на множестве $[1, +\infty)$, то существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

III. Если функция $f(x)$ не ограничена на множестве $[1, +\infty)$, то либо $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, либо $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

A	только I
B	только I и II
C	только II и III
D	I, II и III
E	ни одно из утверждений I, II, III не является верным

4.1.2 Вторая часть теста

1. Система уравнений $Bx = 0$, где $x \in \mathbf{R}^4$, имеет в качестве множества решений линейную оболочку системы векторов

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Известно также, что матрица BB^T единичная, где через B^T обозначается матрица, транспонированная к B. Положим $A = B^T B$. Тогда

а) матрица A имеет ранг 3;

Да Нет

б) матрица A задает проектор в $\mathbf{R}^4$;

Да Нет

в) характеристический многочлен матрицы A имеет вид $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^3$;

Да Нет

г) сумма элементов матрицы A равна 4;

Да Нет

д) есть 8 вариантов матрицы B, в которых она имеет нулевые элементы;

Да Нет

е) если у матрицы B имеется ровно два нулевых элемента, то она квадратная;

Да Нет

ж) если у матрицы B первая строка состоит из одинаковых элементов, то все элементы матрицы B по абсолютной величине равны $1/2$;

Да Нет

з) у матрицы B первый и последний столбцы ортогональны.

Да Нет

2. Интегральная кривая $y = \varphi(x)$ для дифференциального уравнения

$$y' = \frac{2y}{x \ln x} + \frac{1}{x}$$

проходит через точку $(x_0, y_0) = (e, 0)$ и служит графиком его максимального (непродолжаемого) решения. Тогда

а) область определения функции $\varphi(x)$ — интервал $(0, +\infty)$ за исключением точки $x = 1$;

Да Нет

б) интегральная кривая имеет вертикальную асимптоту;

Да Нет

в) интегральная кривая имеет наклонную асимптоту;

Да Нет

г) функция $\varphi(x)$ стремится к $-\infty$ при $x \to +\infty$;

Да Нет

д) функция $\varphi(x)$ достигает наименьшего значения в точке $x = e^{1/2}$, при этом $\varphi(e^{1/2}) = -1/4$;

Да Нет

е) функция $\varphi(x)$ имеет две точки перегиба $x_1 = e^3$, $x_2 = e^{1/3}$, при этом $\varphi(e^3) = 6$, $\varphi(e^{1/3}) = -2/9$;

Да Нет

ж) уравнение $\varphi(x) = 0$ имеет два решения $x_1 = 1$ и $x_2 = e$;

Да Нет

з) график функции $\varphi(x)$ замкнут в $\mathbf{R}^2$.

Да Нет

3. Функция одной вещественной переменной задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |x^2 - 1|^{1/n}, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1 + x^2 + \cdots + x^{2n}}\right)^{1/n}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Тогда

а) областью определения функции $f(x)$ является интервал $(-\infty, +\infty)$;

Да Нет

б) областью определения функции $f(x)$ является полуинтервал $(-\infty, 1]$;

Да Нет

в) на промежутке $[-1, 1]$ функция $f(x)$ четная;

Да Нет

г) в области определения у функции $f(x)$ имеется один устранимый разрыв;

Да Нет

д) в области определения у функции $f(x)$ имеется один неустранимый разрыв первого рода;

Да Нет

е) множество значений функции $f(x)$ есть полуинтервал $(0, 1]$;

Да Нет

ж) функция $f(x)$ не достигает своего наименьшего значения;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

4. Дана функция $f(x, y) = xy^2$ и множество $M = \{\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + y^4 = 1\,\}$. Тогда

а) точка $(0, 1)$ является точкой локального максимума функции f на множестве M;

Да Нет

б) точка $(0, -1)$ является точкой локального минимума функции f на множестве M;

Да Нет

в) число локальных максимумов функции f на множестве M четно;

Да Нет

г) число локальных минимумов функции f на множестве M нечетно;

Да Нет

д) точка $(-1, 0)$ является точкой локального минимума функции f на множестве M;

Да Нет

е) точка $(1, 0)$ является точкой локального максимума функции f на множестве M;

Да Нет

ж) в точке $\left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt[4]{2}\right)$ функция f достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

з) в точке $\left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt[4]{2}\right)$ функция f достигает наименьшего значения на множестве M.

Да Нет

5. Последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определяется равенствами

$$f_1(x) = \sqrt{x},\ f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}},\ \ldots,\ f_n(x) = \underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \ldots \sqrt{x}}}}_{n \text{ раз}},\ \ldots$$

Обозначим через M множество тех x, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, и пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, где $x \in M$. Тогда

а) функция $f(x)$ определена при любом $x \geqslant 0$;

Да Нет

б) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 2]$;

Да Нет

в) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[3, 5]$;

Да Нет

г) последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[0, 2]$;

Да Нет

д) последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[3, 5]$;

Да Нет

е) на любом интервале $(a, b) \subset M$, $a > 0$, последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно;

Да Нет

ж) значение $f(3) = \dfrac{\sqrt{10}+1}{2}$;

Да Нет

з) функция $f(x)$ дифференцируема в каждой внутренней точке множества M.

Да Нет

4.2 Ответы и решения теста

4.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. D. **2.** B. **3.** C. **4.** B. **5.** B. **6.** C. **7.** E. **8.** C. **9.** D. **10.** E. **11.** D. **12.** C. **13.** C. **14.** D. **15.** C. **16.** E. **17.** C. **18.** B. **19.** B. **20.** D. **21.** B. **22.** C. **23.** B. **24.** B. **25.** D. **26.** C. **27.** C. **28.** D. **29.** A. **30.** D. **31.** E. **32.** D. **33.** A. **34.** A. **35.** D. **36.** C. **37.** D. **38.** B. **39.** C. **40.** A.

4.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Так как матрица BB^T единичная, то строки матрицы B ортонормированы и, кроме того, составляют базис подпространства решений системы $Bx = 0$. Иными словами, строки матрицы B являются ортонормированной фундаментальной системой решений для следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 - b_3 - b_4 = 0, \\ 2b_1 - b_2 - 2b_3 + b_4 = 0. \end{cases}$$

Одним из возможных вариантов такой системы решений является пара строк

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а все остальные получаются из этой пары путем ортогонального преобразования. Таким образом, общий вид матрицы B описывается формулой

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где Q — произвольная ортогональная матрица порядка 2. Так как при этом $Q^TQ = I$, то

$$A = B^TB = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q^TQ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен двум, $A^2 = A$, т. е. A — проектор. Собственное число 1 у проектора имеет кратность, равную рангу, т. е. 2, а собственное число 0 — кратность $4 - 2 = 2$. Таким образом, характеристический многочлен матрицы A имеет вид $p(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda)^2$. Ответы на первые четыре пункта следующие: а) нет, б) да, в) нет, г) да.

Что касается матрицы B, то она имеет вид

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Q & Q \end{pmatrix},$$

где общий вид ортогональной матрицы Q второго порядка имеет два варианта:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Есть восемь различных вариантов для Q, при которых она имеет нулевые элементы: $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Ровно два нулевых элемента у матрицы B быть не может, так что утверждение е) формально верное. Первая строка матрицы B состоит из одинаковых элементов лишь в случае $\cos\varphi = \sin\varphi$, т. е. при $\varphi = \pi/4$ или $\varphi = 5\pi/4$. При этом $|\cos\varphi| = |\sin\varphi| = 1/\sqrt{2}$. Ответы на последние четыре пункта: д) да, е) да, ж) да, з) да.

Задача 2. Правая часть дифференциального уравнения определена на всей плоскости (x, y) за исключением точек вида $(0, y)$ и $(1, y)$. В то же время, любое максимальное решение имеет областью определения некоторый отрезок J, так что $J \subset (1, +\infty)$ (пункт а) — «нет»).

Заданное дифференциальное уравнение является линейным неоднородным. Решая однородное уравнение $y' = \dfrac{2y}{x \ln x}$, получим общее решение:

$$y = C \ln^2 x, \quad C \in (-\infty, +\infty).$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем методом вариации постоянной. Имеем

$$C' \ln^2 x + C \cdot \frac{2 \ln x}{x} = \frac{2C \ln^2 x}{x \ln x} + \frac{1}{x},$$

откуда $C = -1/\ln x$ и $y = -\ln x$. Таким образом, общее решение таково:

$$y = -\ln x + C \ln^2 x.$$

Подставив начальное условие, получим $\varphi(x) = \ln^2 x - \ln x$.

Область определения $J = (1, +\infty)$. Так как $\varphi(x) \to 0$ при $x \to 1$, то вертикальной асимптоты у кривой $\varphi(x)$ не существует (пункт б) — «нет»). При $x \to +\infty$ функция $\varphi(x)$ стремится к $+\infty$, а $\varphi(x)/x \to 0$, следовательно, наклонной асимптоты не существует (пункт в) — «нет», (пункт г) — «нет»).

Заметим, что так как область определения $\varphi(x)$ не включает в себя точку $x = 1$, то ответ на пункт ж) — «нет», а так как $\varphi(x) \to 0$ при $x \to 1$, то точка $(1, 0)$, не принадлежащая графику $\varphi(x)$, является предельной. Значит график не является замкнутым (пункт е) — «нет»).

Так как

$$\varphi'(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x},$$

то единственной стационарной точкой функции $\varphi(x)$ является точка $x = \sqrt{e}$, при этом $\varphi(\sqrt{e}) = \ln^2 \sqrt{e} - \ln \sqrt{e} = -1/4$. Так как $\varphi(x) \to 0$ при $x \to 1$ и $\varphi(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то точка $x = \sqrt{e}$ действительно точка минимума (пункт д) — «да»).

Найдем точки перегиба. Поскольку

$$\varphi''(x) = \frac{3 - 2\ln x}{x^2},$$

то единственной точкой перегиба может служить $x = e^{3/2}$ (ответ на вопрос пункта е) — «нет»).

Задача 3. Очевидно, что $f(-1) = 0$ и $f(0) = 1$.

Пусть $x \leqslant 0$, $x \neq -1$. Тогда $|x^2 - 1| > 0$, и $\lim\limits_{n\to\infty} = 1$.

Пусть $x > 0$. Имеем:

$$1 + x^2 + \cdots + x^{2n} = \begin{cases} \dfrac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1}, & \text{если } x \neq 1, \\ n + 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ 1/x^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Окончательно получаем (см. рис. 6):

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < -1, \\ 0, & \text{если } x = -1, \\ 1, & \text{если } -1 < x \leqslant 1, \\ 1/x^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

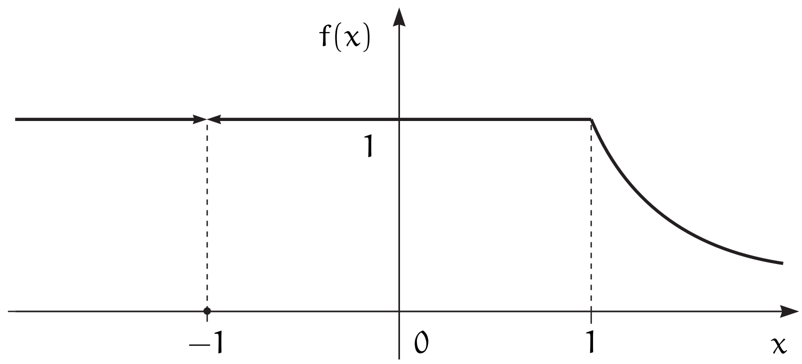


Рис. 6. График функции $f(x)$

Таким образом,

* функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$;
* функция $f(x)$ имеет единственный разрыв в точке $x = -1$, и этот разрыв является устранимым;
* функция $f(x)$ достигает наименьшего значения в точке $x = -1$;
* функция $f(x)$ ограничена на $(-\infty, +\infty)$;

* так как $f(-1) = 0$, $f(1) = 1$, то функция $f(x)$ не является четной на отрезке $[-1, 1]$;

* функция $f(x)$ имеет горизонтальные асимптоты при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$.

Задача 4. Множество M компактное, а функция $f(x, y)$ непрерывная, поэтому она достигает на M наибольшего и наименьшего значений.

Найдем критические точки функции $f(x, y)$ на множестве M. Составим функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = xy^2 - \lambda(x^2 + y^4 - 1)$ и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ x^2 + y^4 = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 - 2\lambda x = 0, \\ 2xy - 4\lambda y^3 = 0, \\ x^2 + y^4 = 1. \end{cases} \tag{$*$}$$

1) Если $y = 0$, то из третьего уравнения следует, что $x^2 = 1$, а из первого — $\lambda = 0$.

2) Если $y \neq 0$, то из первого уравнения следует, что $\lambda \neq 0$, и из первых двух уравнений следует, что $x^2 = y^4$. Таким образом, решениями системы ($*$) могут быть следующие точки:

при $\lambda = 0$: $A_1 = (1, 0)$, $A_2 = (-1, 0)$;
при $\lambda = 1/2$: $A_3 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt[4]{2})$, $A_4 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt[4]{2})$;
при $\lambda = -1/2$: $A_3 = (-1/\sqrt{2}, 1/-\sqrt[4]{2})$, $A_3 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt[4]{2})$.

Нетрудно проверить, что и обратно, все эти точки удовлетворяют системе ($*$).

Итак, имеем шесть критических точек. Имеем $f(A_1) = f(A_2) = 0$, $f(A_3) = f(A_4) = 1/2$, $f(A_5) = f(A_6) = -1/2$. Отсюда следует, что

* в точках A_3, A_4 функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M;

* в точках A_5, A_6 функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M.

Матрица вторых производных функции Лагранжа (по x, y) есть

$$D^2L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 2y \\ 2y & 2x - 12\lambda y^3 \end{pmatrix},$$

а «разрешенные» вариации (dx, dy) в каждой точке (x, y) определяются равенством $2xdx + 4y^3dy = 0$. В точке A_1 при $\lambda = 0$ имеем

$$D^2L(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad dx = 0.$$

В этой точке квадратичная форма

$$(dx \;\; dy) D^2L(x, y, \lambda) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = 2dy^2 > 0 \quad \text{при} \quad dy \neq 0.$$

Следовательно, точка A_1 является точкой локального минимума.

Аналогично, точка A_2 является точкой локального максимума.

Заметим, что два последних утверждения можно установить без использования матрицы вторых производных, рассматривая непосредственно поведение функции $f(x, y)$ в малых окрестностях точек A_1, A_2.
Ответы: а) нет, б) нет, в) нет, г) да, д) нет, е) нет, ж) да, з) да.

Задача 5. Представим последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в рекурсивном виде:

$$f_1(x) = \sqrt{x}, f_n(x) = \sqrt{x + f_{n-1}(x)}.$$

При любом n область определения $f_n(x)$ — полуинтервал $[0, +\infty)$. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то можно перейти к пределу в равенстве $f_n(x) = \sqrt{x + f_{n-1}(x)}$. При этом получим равенство $f(x) = \sqrt{x + f(x)}$, откуда получим, что $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$ при $x > 0$, и $f(0) = 0$.

Докажем, что при любом $x \in [0, +\infty)$ предел существует. Для этого проверим, что

* последовательность $\{f_n(x)\}$ монотонная;
* последовательность $\{f_n(x)\}$ ограниченная.

Монотонность докажем по индукции:
1) ясно, что $f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} \geqslant \sqrt{x} = f_1(x)$;
2) пусть $f_n(x) \geqslant f_{n-1}(x)$, тогда

$$f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)} \geqslant \sqrt{x + f_{n-1}(x)} = f_n(x).$$

Ограниченность тоже докажем по индукции:
1) ясно, что $f_1(x) = \sqrt{x} < \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} + x}$;
2) пусть $f_n(x) < \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$, тогда

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \sqrt{x + f_n(x)} < \\ &< \sqrt{x + \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{1 + 4x} + (1 + 4x)}{4}} = \\ &= \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{1 + 4x})^2}{4}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, предел существует при всех $x \geqslant 0$, т. е. $M = [0, +\infty)$, и равен

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Тем самым, ответ на вопрос а) — «да», в) — «да». Так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \neq 0$, то $f(x)$ имеет разрыв в точке $x = 0$, и ответ на вопрос б) — «нет». Значение $f(3) = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 3}}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$. Следовательно, ответ на вопрос ж) — «нет». Так как множество внутренних точек M — интервал $(0, +\infty)$, и $f(x)$ дифференцируема при любом $x > 0$, то ответ на вопрос з) — «да».

Так как $f(x)$ является разрывной на $[0, 2]$, а все $f_n(x)$ непрерывны на M, то сходимость на $[0, 2]$ неравномерная, и ответ на вопрос г) — «нет».

Последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ монотонно. На любом отрезке $[a, b]$, где $a > 0$, функция $f(x)$ непрерывна. Следовательно, сходимость на $[a, b]$ является равномерной, и ответы на вопрос д) — «да» и е) — «да».

Докажем непосредственно, что $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на любом отрезке $[a, b]$, где $a > 0$.

Справедливо следующее равенство:

$$(f_{n+1}(x) - f_n(x))(f_{n+1}(x) + f_n(x)) = f_{n+1}^2(x) - f_n^2(x) =$$
$$= x + f_n(x) - x - f_{n-1}(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x).$$

Откуда следует, что

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{f_{n+1}(x) + f_n(x)}|f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

При $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(a) \geqslant r > 1$. Значит, найдется такое натуральное N, что при любом $n > N$ выполняется неравенство $f_n(x) \geqslant f_n(a) > 1$, и

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2}|f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Отсюда следует, что для любых $n > N$ и $k > 0$ (и $x \in [a, b]$)

$$|f_{n+k}(x) - f_{n+k-1}(x)| \leqslant \frac{1}{2^k}|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^{k+n-N}}|f_{N+1}(x) - f_N(x)|.$$

Так как $f_N(x)$ и $f_{N+1}(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то

$$|f_{n+k}(x) - f_{n+k-1}(x)| \leqslant \frac{K_N}{2^{n+k}},$$

где $K_N = \max\limits_{x\in[a,b]} 2^N|f_{N+1}(x) - f_N(x)|$.

Поэтому

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+k}(x) - f_{n+k-1}(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant$$
$$\leqslant K_N \left(\frac{1}{2^{n+k}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leqslant \frac{K_N}{2^n}.$$

Это означает, что последовательность $\{f_n(x)\}$ является равномерно фундаментальной на отрезке $[a, b]$. Согласно критерию Коши, она сходится равномерно на отрезке $[a, b]$.

5 Вступительный экзамен 2004 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

5.1 Тест

5.1.1 Первая часть теста

1. Наименьшее значение функции x^2 на множестве $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$ достигается только в точке (точках)

A $(0, 0)$

B $(0, 1)$

C $(0, -1)$

D $(1, 0)$, $(-1, 0)$

E $(0, 1)$, $(0, -1)$

2. Дано множество $M = (0, 1) \cup \{2\}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. M открытое множество.

II. Граница M не пересекается с M.

III. Дополнение к M открытое множество.

A только I

B только II

C только I и II

D только II и III

E ни одно из утверждений I, II, III не является верным

3. Пусть M — множество на вещественной прямой, не имеющее предельных точек. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. M открытое множество.

II. M замкнутое множество.

III. M непустое множество.

A только I

B только II

C только III

D только I и II

E только II и III

4. Дана функция $f(x, y) = e^{x-y}$ и множество $M = \{(x, y) \colon x + y^2 = 0\}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. f достигает наибольшего значения на M.

II. f достигает наименьщего значения на M.

III. f ограничена на M.

A только I

B только II

C только I и III

D только II и III

E ни одно из утверждений I, II, III не является верным

5. Значение максимального решения задачи Коши $y' = 2xy$ при начальном условии $y(1) = 1$ в точке $x = -1$ равно

A 0

B $1/e$

C 1

D e

E не определено

6. Множество граничных точек множества $M = \{1/3, 1/4, 1/5, \dots\} \cup \{2/3, 3/4, 4/5, \dots\}$ равно

A M

B $\varnothing$

C $M \cup \{0\}$

D $M \cup \{0; 1\}$

E $M \cup \{1\}$

7. Дополнение к незамкнутому подмножеству множества вещественных чисел

A замкнуто

B открыто

C не является замкнутым

D не является открытым

E ни одно из утверждений A, B, C, D не является верным

8. Пусть A — симметричный линейный оператор в пространстве R^{2n}. Известно, что характеристический многочлен этого оператора равен $(\lambda - 1)^2 \dots (\lambda - n)^2$. Тогда число инвариантных подпространств оператора A равно

A 2

B $2n$

C 2^n

D 2^{2n}

E бесконечно много

9. В пространстве $\mathbf{R}^n$ при $n \geqslant 1$ задана система из четырех векторов $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, причем каждый из векторов x_i является линейной комбинацией остальных трех векторов системы X. Тогда

A если среди векторов x_i имеется нулевой, то ранг системы X равен двум

B если среди векторов x_i нет нулевых, то ранг системы X равен трем

C если линейная оболочка системы X имеет размерность два, то среди векторов x_i имеется нулевой

D если линейная оболочка системы X совпадает с $\mathbf{R}^n$, то $n = 3$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. В пространстве $\mathbf{R}^n$ при $n \geqslant 1$ заданы два подпространства L_1 и L_2 с размерностями n_1 и n_2, соответственно, причем $\mathbf{R}^n = L_1 + L_2$. Тогда

A если $n_2 \geqslant n$, то $L_2 \setminus L_1 \neq \varnothing$

B если $n_1 + n_2 \leqslant n$, то $L_1 \cap L_2 = \varnothing$

C если $n > 7$, то $n_1 + n_2 \geqslant n$

D если размерность пересечения $L_1 \cap L_2$ не равна нулю, то $n_1 + n_2 \leqslant n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Пусть A и B — матрицы размеров $m \times n$, $m > 1$, $n > 1$, a и b — столбцы длины m, а x — искомый столбец длины n. Тогда

A если система $Ax = a$ разрешима при любой правой части a, то $n \leqslant m$

B если обе системы $Ax = a$ и $Bx = b$ разрешимы при любых правых частях a и b, то и объединенная система $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ разрешима при любых a и b

C если $n = m$, и обе системы $Ax = a$ и $Bx = b$ разрешимы при любых правых частях a и b, то система $(A + B)x = c$ разрешима при любой правой части c

D если $n < m$, и система $Ax = a$ разрешима при любой правой части a, то матрица A нулевая

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Через $\det X$ обозначается определитель любой квадратной матрицы X, а через A^T и A^{-1} — транспонированная и обратная матрицы к A. Тогда

A если множество решений системы $(AB)x = 0$ имеет размерность не выше единицы, то $\det A \neq 0$ или $\det B \neq 0$

B если при всяком $\lambda \in [0, 1]$ оказывается $\det(\lambda A + (1-\lambda)B) \neq 0$, то $\det A + \det B \neq$ $\neq 0$

C если $(\det A)^2 \neq \det A$, то $\det A \neq \det A^T$

D при любом $\lambda > 0$ выполняется равенство $\det(\lambda A) = \lambda \det A$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Пусть A и B — два линейных оператора, действующие из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$ при $n > 1$. Через AB обозначим их суперпозицию, т. е. $(AB)x = A(Bx)$ при $x \in \mathbf{R}^n$. Пусть $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} B$ и $\operatorname{Im}(AB)$ — образы соответствующих операторов. Тогда

A $\operatorname{Im}(AB) \subset \operatorname{Im} A$

B $\operatorname{Im}(AB) \subset \operatorname{Im} B$

C $\operatorname{Im}(AB) \supset \operatorname{Im} B$

D $\operatorname{Im}(AB) \supset \operatorname{Im} A$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A если определитель матрицы $(A^2 - I)$, где I — единичная матрица, отрицателен, то у матрицы A имеется собственное число в интервале $(-1, 1)$

B если x_1 и x_2 — собственные векторы матрицы A, то они линейно независимые

C если A имеет единственное собственное число, равное единице, то A — единичная матрица

D если у матрицы A есть двумерное инвариантное подпространство, то у этой матрицы имеется собственное число кратности 2

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. Вещественные квадратные матрицы A и B порядка $n \geqslant 2$ рассматриваются как операторы в $\mathbf{R}^n$. Тогда

A если матрица $(B^T A B)$, где B^T —транспонированная к B, не задает оператор проектирования, то либо B не является ортогональной, либо A не задает оператор проектирования

B если матрица A не задает оператор проектирования, то ее характеристический многочлен не может иметь вид $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^k (\lambda - 1)^{n-k}$, где k — целое, и $0 \leqslant k \leqslant n$

C	если матрица A не задает оператор проектирования, то и A^2 не задает оператор проектирования

D	если ортогональная матрица A не является единичной, то в $\mathbf{R}^n$ не существует базиса, состоящего из собственных векторов матрицы A

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Пусть A и B — вещественные квадратные матрицы порядка n, причем A — симметричная. Тогда

A	если B ортогональная матрица, и $AB = B$, то A — единичная матрица

B	если для некоторого $x \in \mathbf{R}^n$ оказалось, что $x^T A x = 0$, и A отрицательно полуопределенная матрица, то $x = 0$

C	если матрица $(B^T A B)$ отрицательно полуопределена, то и A отрицательно полуопределена

D	если матрица B тоже симметричная, и обе матрицы A и B положительно определены, то матрица $(B^{-1} A B)$ симметрична и положительно определена

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Интеграл $\int_1^e x \ln x dx$ равен

A	$\dfrac{e^2 - 1}{4}$

B	$\dfrac{e^2 + 1}{4}$

C	$\dfrac{e^2 + 2}{4}$

D	$\dfrac{e^2 - 1}{2}$

E	$\dfrac{e^2 + 1}{2}$

18. Функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[2, +\infty)$, дифференцируема на интервале $(2, +\infty)$, и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Какие из приведенных ниже утверждений (I, II, III, IV) верны?

I. $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

II. Функция $f(x)$ ограничена на полуинтервале $[2, +\infty)$.

III. Существует такое число $c > 2$, что производная $f'(x)$ ограничена на полуинтервале $[c, +\infty)$.

IV. Функция $f(x)$ имеет по крайней мере один локальный минимум на полуинтервале $[2, +\infty)$.

A только I

B только II

C только III

D только I и II

E только II и IV

19. Неявная функция $y = y(x)$ определяется как решение уравнения $x^2 + 3xy - 5x + 3y^3 = 2$. Тогда производная $\frac{dy}{dx}(1)$ равна

A $-5/6$

B $-8/3$

C $4/7$

D 0

E $3/5$

20. Пусть $a, b > 0$. Тогда предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ равен

A $\sqrt{ab}$

B $\frac{a+b}{2}$

C 1

D ab

E $(\ln a + \ln b)^2$

21. При каких x график функции $y = 10/x^2 - 10/x^3 + 3/x^4$ имеет точки перегиба?

A 1

B -1

C 2

D 3

E точек перегиба график не имеет

22. Кривые $y = x^2$, $x = y^2$ $(x, y > 0)$ пересекаются под углом

A $\operatorname{arctg}(3/4)$

B $\pi/4$

C $\pi/3$

D $\operatorname{arctg}(1/2)$

E $\operatorname{arctg}(2/3)$

23. К графику функции $y = 1/\sqrt{x}$ проведена касательная в точке $(x_0, 1/\sqrt{x_0})$. Площадь треугольника, образованного касательной и осями координат, равна 9. Тогда x_0 равно

A $3/2$

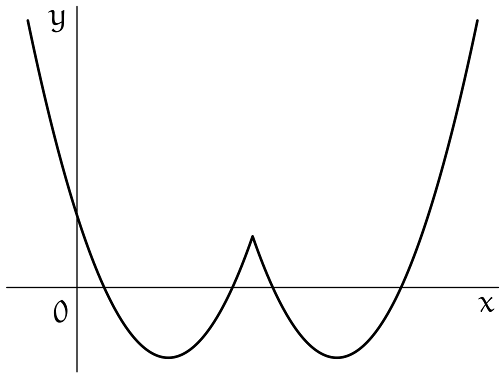
B $9/4$

C 3

D 9

E 16

24. На рисунке приведен график функции $f(x) = a(x+d)^2 + b|x+d| + c$.



Тогда

A $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

B $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$

C $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$

D $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$

E $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$

25. Радиус шара убывает со скоростью, пропорциональной объему этого шара. В момент $t = 0$ радиус равен 1, в момент $t = 1$ радиус равен $1/2$. В момент $t = 2$ радиус шара равен

A $1/4$

B $1/\sqrt{5}$

C $1/\sqrt[3]{10}$

D $1/\sqrt{7}$

E $1/\sqrt{6}$

26. Предел $\lim\limits_{x\to0}(1-x^2)^{1/x}$ равен

A 0

B 1

C -1

D e

E не существует

27. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на $\mathbf{R}$, причем существуют пределы $\lim\limits_{x\to0} f(x) = y_0$ и $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)$. Тогда предел $\lim\limits_{x\to0} g(f(x))$ равен

A $g(f(0))$

B $g(y_0)$

C $\lim\limits_{y\to f(0)} g(y)$

D $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)$

E может не существовать

28. Функция $g(x)$ задана формулой

$$g(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{если } x \neq 0,\\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $g(x)$ непрерывна в точке $x=0$.

II. Функция $g(x)$ имеет непрерывную первую производную в точке $x=0$.

III. Функция $g(x)$ имеет непрерывную вторую производную в точке $x=0$.

A только I

B только II

C только I и II

D только I и III

E I, II и III

29. Наименьшее значение функции $f(x, y) = \cos x + \cos y$ при ограничении $|x| + |y| = \pi/2$, равно

A $\quad 0$

B $\quad 1/\sqrt{2}$

C $\quad 1$

D $\quad \sqrt{2}$

E $\quad 2$

30. Неопределенный интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \cos x}$ равен

A $\quad \ln(1 + \cos x) + C$

B $\quad \dfrac{1}{x + \sin x} + C$

C $\quad \operatorname{tg} x + C$

D $\quad \operatorname{tg}(x/2) + C$

E $\quad \operatorname{ctg} x + \dfrac{1}{\sin x} + C$

31. Какова площадь фигуры, заданной неравенствами $x^2 + y^2/4 \leqslant 1$ и $|x| + |y|/2 \geqslant 1$ на координатной плоскости?

A $\quad \pi - 1$

B $\quad \pi - 2$

C $\quad 2(\pi - 1)$

D $\quad 2(\pi - 2)$

E $\quad \pi^2 - 1$

32. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbf{R}$, и пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = 0$. Для каких из следующих утверждений (I, II, III) можно подобрать функцию $f(x)$, такую, что соответствующее утверждение верно по отношению к этой функции?

I. Функция $f(x)$ неограничена.

II. Функция $f(x)$ не имеет горизонтальной асимптоты.

III. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ не существует.

A $\quad$ только I

B $\quad$ только II

C только I и II

D только I и III

E I, II и III

33. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}(x^2)}$ равен

A 0

B 1

C 2

D 4

E не существует

34. Наименьшее значение функции $f(x,y)=x^2+y^2+4xy-5x+5y-15$ равно

A $-5/2$

B $-25/2$

C -16

D -31

E не существует

35. Множество решений уравнения

$$\frac{\ln(3/2)}{x^2-1}=\int_2^3\frac{ds}{s^2-1}$$

есть

A $\{0\}$

B $\{-1,1\}$

C $\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$

D $\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$

E $\varnothing$

36. Пусть $f(x)=\operatorname{tg}(e^{-x^2})$. Тогда значение производной $f'(0)$ равно

A 1

B $\operatorname{tg} e$

C $1/\cos^2 e$

D $\quad 0$

E $\quad$ не существует

37. Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[0,1]$ функция. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $f(x)$ имеет первообразную, дифференцируемую на $(0,1)$

II. Функция $f(x)$ интегрируема по Риману на $[0,1]$.

III. Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $(0,1)$.

A $\quad$ только I

B $\quad$ только II

C $\quad$ только III

D $\quad$ только I и II

E $\quad$ I, II и III

38. Интеграл $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$ равен

A $\quad \pi$

B $\quad \pi/4$

C $\quad 1$

D $\quad$ другому значению

E $\quad$ не существует

39. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$ сходится на всей вещественной прямой к функции

A $\quad \cos x$

B $\quad \cos(x^2)$

C $\quad \cos^2 x$

D $\quad$ к другой функции

E $\quad$ расходится при $|x| > 0$

40. Пусть $f(x)$ — непрерывная и ограниченная на $(0,1)$ функция. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $(0,1)$.

II. Функция $f(x)$ имеет пределы (конечные или бесконечные) при $x \to 0$ и $x \to 1$.

III. Функция $f(x)$ достигает своего наименьшего и наибольшего значения на $(0, 1)$.

A только I

B только II

C только III

D только II и III

E ни одно из утверждений (I, II, III) не является верным

5.1.2 Вторая часть теста

1. Многочлен $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$ является характеристическим многочленом симметричной матрицы A. Известно, что векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

являются собственными векторами матрицы A. Тогда

а) матрица A задает ортогональный проектор;

Да Нет

б) матрица A является ортогональной матрицей;

Да Нет

в) существует две матрицы A, удовлетворяющих поставленным условиям;

Да Нет

г) существует четыре матрицы A, удовлетворяющих поставленным условиям;

Да Нет

д) существует $4! = 24$ матрицы A, удовлетворяющих поставленным условиям;

Да Нет

е) матрица A имеет 8 нулевых элементов;

Да Нет

ж) для всякого вещественного числа α найдется столбец x, при котором $x^{T}Ax = \alpha$, где через x^{T} обозначается строка, получающаяся транспонированием столбца x;

Да Нет

з) сумма элементов матрицы A равна нулю.

Да Нет

2. Максимальное (непродолжаемое) решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения

$$y' = \frac{2y}{x+1} + 2(x-1)(x+1)^2$$

удовлетворяет условию $\varphi(1) = 0$. Тогда

а) область определения функции $\varphi(x)$ — интервал $(-\infty, +\infty)$;

Да Нет

б) график функции $\varphi(x)$ имеет вертикальную асимптоту;

Да Нет

в) график функции $\varphi(x)$ имеет наклонную асимптоту;

Да Нет

г) функция $\varphi(x)$ стремится к $-\infty$ при $x \to +\infty$;

Да Нет

д) функция $\varphi(x)$ имеет единственную точку локального максимума $x = 0$, при этом $\varphi(0) = 2$;

Да Нет

е) функция $\varphi(x)$ достигает наименьшего значения в точках $x = -1$, $x = 1$, при этом $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$;

Да Нет

ж) функция $\varphi(x)$ имеет две точки перегиба $x_1 = -1/\sqrt{3}$, $x_2 = 1/\sqrt{3}$, при этом $\varphi\left(-1/\sqrt{3}\right) = \varphi\left(1/\sqrt{3}\right) = 4/9$;

Да Нет

з) график функции $\varphi(x)$ замкнут в $\mathbf{R}^2$.

Да Нет

3. Дана функция $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ и множество $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon xyz = 1\}$. Тогда а) функция f достигает на множестве M наибольшего значения;

Да Нет

б) функция f достигает на множестве M наименьшего значения;

Да Нет

в) функция f имеет на множестве M не менее двух локальных максимумов;

Да Нет

г) функция f имеет на множестве M не менее восьми локальных минимумов;

Да Нет

д) точка $(2, 1, 1/2)$ является точкой локального максимума функции f на множестве M;

Да Нет

е) точка $(4, 1, 1/4)$ является точкой локального минимума функции f на множестве M;

Да Нет

ж) в точке $\left(-\sqrt{2}, -1, 1/\sqrt{2}\right)$ функция f достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

з) в точке $\left(-\sqrt{2}, -1, -1/\sqrt{2}\right)$ функция f достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

4. Функция $f(x)$ определяется следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{3n} + 2x^{2n} + 1}, & \text{если } x \geqslant 1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{3n} + x^{2n}}, & \text{если } -1 < x < 1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} x \operatorname{arctg}(nx), & \text{если } x \leqslant -1. \end{cases}$$

Тогда

а) функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой $\mathbf{R}$ и непрерывна в каждой точке $\mathbf{R}$;

Да Нет

б) функция $f(x)$ имеет асимптоту;

Да Нет

в) функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(-1/2, 1/2)$;

Да Нет

г) функция $f(x)$ принимает наименьшее значение в области своего определения;

Да Нет

д) $f'(1) = 3$;

Да Нет

е) функция $f(x)$ убывает на множестве $(-\infty, 0)$;

Да Нет

ж) функция $f(x)$ является выпуклой на множестве $[0, +\infty)$;

Да Нет

з) множество значений функции $f(x)$ является выпуклым подмножеством числовой прямой $\mathbf{R}$.

Да Нет

5. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{x} e^{-nx}$. Обозначим через M множество его сходимости и через $f(x)$ — сумму этого ряда для $x \in M$.

а) множество M является замкнутым подмножеством числовой прямой;

Да Нет

б) множество M является ограниченным подмножеством числовой прямой;

Да Нет

в) функция $f(x)$ непрерывна на множестве M;

Да Нет

г) функция $f(x)$ ограничена сверху на множестве M;

Да Нет

д) функция $f(x)$ достигает на множестве M наименьшего значения;

Да Нет

е) на множестве M ряд не сходится равномерно;

Да Нет

ж) существует отрезок $[a, b] \subset M$, $a < b$, на котором ряд сходится равномерно;

Да Нет

з) на любом интервале $(a, b) \subset M$ ряд сходится равномерно.

Да Нет

5.2 Ответы и решения теста

5.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. E. **2.** E. **3.** B. **4.** C. **5.** C. **6.** D. **7.** D. **8.** E. **9.** E. **10.** C. **11.** D. **12.** B. **13.** A. **14.** A. **15.** A. **16.** A. **17.** B. **18.** B. **19.** D. **20.** A. **21.** E. **22.** A. **23.** E. **24.** B. **25.** D. **26.** B. **27.** E. **28.** A. **29.** C. **30.** D. **31.** D. **32.** E. **33.** B. **34.** E. **35.** D. **36.** D. **37.** E. **38.** B. **39.** B. **40.** E.

5.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Из характеристического уравнения матрицы A видно, что она имеет два собственных числа 0 и 1, каждое кратности 2. Так как матрица A симметричная, то собственные векторы, соответствующие разным собственным числам, ортогональны. Обозначим через

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ z_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ z_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и заметим, что векторы z_1 и z_2 не ортогональны (и соответствуют одному собственному числу), и векторы z_3 и z_4 не ортогональны (и соответствуют одному собственному числу). Значит, существует ровно две матрицы A: такая, что $Az_1 = z_1$, $Az_2 = z_2$, $Az_3 = Az_4 = 0$ и такая, что $Az_1 = Az_2 = 0$, $Az_3 = z_3$, $Az_4 = z_4$ (вопрос в) — Да, вопросы г) и д) — Нет).

Так как матрица A симметричная и имеет собственные числа 0 и 1, то она задает ортопроектор (вопрос а) — Да). Так как собственное число 0 имеет ненулевую кратность, то матрица A не может быть ортогональной (вопрос б) — Нет).

Так как матрица A задает ортопроектор, то любой вектор $x \in \mathbf{R}^4$ представим в виде суммы $x = x_1 + x_2$, где $Ax_1 = x_1$, $Ax_2 = 0$ и $x_1^T x_2 = 0$ (ортогональны). Тогда

$$x^T A x = (x_1 + x_2)^T A (x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^T x_1 = x_1^T x_1 + x_2^T x_1 = x_1^T x_1 >= 0.$$

Значит, если $\alpha < 0$, то не существует такого x, что $x^T A x = \alpha$ (вопрос ж) — Нет).

Для ответа на вопросы е) и з) сосчитаем матрицу A. Для упрощения вычислений ортогонализуем систему собственных векторов матрицы A. А именно, рассмотрим векторы

$$z_1' = z_1 - z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } z_3' = z_3 + z_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (в ней по столбцам стоят собственные векторы z_1', z_2, z_3', z_4) ортогональна.

Для матрицы A возможны два случая. Первый ($Az_1' = z_1'$, $Az_2 = z_2$, $Az_3' = Az_4 = 0$):

$$A = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Второй ($Az_1' = Az_2 = 0$, $Az_3' = z_3'$, $Az_4 = z_4$):

$$A = Q\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как видим, в обоих случаях число нулевых элементов равно 8 (вопрос е) — Да) и сумма элементов матрицы A больше нуля (вопрос з) — Нет).

Задача 2. Правая часть дифференциального уравнения определена на всей плоскости (x, y) за исключением точек вида $(-1, y)$. В то же время, любое максимальное решение имеет областью определения некоторый отрезок J, содержащий точку 1, так что $J \subset \subset (-1, +\infty)$ (пункт а) — Нет).

Заданное дифференциальное уравнение является линейным неоднородным. Решая однородное уравнение $y' = \frac{2y}{x+1}$, получим общее решение:

$$y = C(x+1)^2, \quad C \in (-\infty, +\infty).$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем методом вариации постоянной. Имеем

$$C'(x+1)^2 + C \cdot 2(x+1) = \frac{2C(x+1)^2}{x+1} + 2(x-1)(x+1),$$

откуда $C = (x-1)^2$ и $y = (x-1)^2(x+1)^2$. Таким образом, общее решение таково:

$$y = (x-1)^2(x+1)^2 + C(x+1)^2.$$

Подставив начальное условие $\varphi(1) = 0$, получим интегральную кривую $\varphi(x) = (x-1)^2(x+ + 1)^2 = (x^2-1)^2$. Область определения $J = (-1, +\infty)$.

Функция $\varphi(x)$ — многочлен четвертой степени, значит асимптот у интегральной кривой не может быть (пункты б), в) — Нет).

Так как коэффициент при x^4 положительный, то $\varphi(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ (пункт г) — Нет).

Для поиска экстремумов вычислим производную:

$$\varphi'(x) = 2(x-1)(x+1)^2 + 2(x-1)^2(x+1) = 4(x-1)(x+1)x.$$

Из положительности коэффициента при x^4 следует, что точки $x = -1$ и $x = 1$ являются локальными (на самом деле глобальными) минимумами многочлена $(x-1)^2(x+1)^2$, а точка $x = 0$ является точкой локального максимума. Однако $\varphi(0) = 1 \neq 2$ (пункт д) — Нет). И также $\varphi(x)$ не определена в точке $x = -1$ (пункт е) — Нет).

Для поиска точек перегиба найдем вторую производную

$$\varphi''(x) = 4(x+1)x + 4(x-1)x + 4(x+1)(x-1) = 4(3x^2 - 1).$$

Значит, точки $x = -1/\sqrt{3}$ и $x = 1/\sqrt{3}$ (принадлежащие области определения решения) действительно являются точками перегиба. $\varphi\left(-1/\sqrt{3}\right) = \varphi\left(1/\sqrt{3}\right) = 4/9$, следовательно, ответ на вопрос ж) — Да.

При $x \to -1 + 0$ функция $\varphi(x)$ стремится к нулю. Так как $x = -1$ не принадлежит области определения $\varphi(x)$, то ее график не замкнут в $\mathbf{R}^2$ (пункт з) — Нет).

Задача 3. Множество M замкнуто, но не ограничено. Для последовательности точек $x_n = n$, $y_n = 1/n$, $z_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ выполнены соотношения: $(x_n, y_n, z_n) \in M$ и $f(x_n, y_n, z_n) > n^2$. Значит, функция f не ограничена сверху на множестве M и, следовательно, наибольшего значения у функции f на M не существует. Таким образом, на вопрос а) ответ — Нет.

Множество значений функции f ограничено снизу, поскольку $f(x, y, z) \geqslant 0$ для любой точки (x, y, z). Следовательно, существует $m = \inf\{f(x, y, z) : (x, y, z) \in M\}$. Так как $(1, 1, 1) \in M$ и $f(1, 1, 1) = 7$, то $m \leqslant 7$. Ясно, что если $|x| > 3$ или $|y| > 3$ или $|z| > 3$, то $f(x, y, z) > 7$, поэтому $m = \inf\{f(x, y, z) : (x, y, z) \in C\}$, где $C = M \bigcap \{(x, y, z) : |x| \leqslant 3, |y| \leqslant \leqslant 3, |z| \leqslant 3\}$. Но множество C компактно, и в силу теоремы Вейерштрасса существует такая точка $(x_0, y_0, z_0) \in C$, что $f(x_0, y_0, z_0) = m$. Таким образом, ответ на вопрос б) — Да.

Для нахождения локальных экстремумов функции f воспользуемся методом множителей Лагранжа. Для облегчения выкладок сделаем замену переменных: $u = x, v = \sqrt{2}y, w = 2z$. Тогда $uvw = 2\sqrt{2}$, и функция Лагранжа имеет вид $L(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2 + \lambda\left(2\sqrt{2} - uvw\right)$. Рассмотрим следующую систему уравнений (условия первого порядка):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial w} = 0, \\ uvw = 2\sqrt{2}, \end{cases} \iff \begin{cases} 2u = \lambda vw, \\ 2v = \lambda uw, \\ 2w = \lambda uv, \\ uvw = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Решим эту систему. Перемножив первые три уравнения, получим: $8uvw = \lambda^3(uvw)^2$, откуда (с учетом того, что $uvw = 2\sqrt{2}$) находим $\lambda = \sqrt{2}$. Умножив правую и левую части первого уравнения на u, получим, что $2u^2 = \lambda uvw = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}$, откуда $u = \pm\sqrt{2}$.

Аналогично $v = \pm\sqrt{2}$ и $w = \pm\sqrt{2}$. Следовательно, получаем 4 критические точки: $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ и $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Или в координатах (x, y, z): $\left(\sqrt{2}, 1, 1/\sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{2}, -1, -1/\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, 1, -1/\sqrt{2}\right)$ и $\left(-\sqrt{2}, -1, 1/\sqrt{2}\right)$.

Для ответа на вопрос, являются ли эти точки локальными максимумами или минимумами, можно было бы пойти по стандартному пути и исследовать матрицу вторых производных функции L. Однако можно заметить, что значение функции f во всех критических точках одинаково. В то же время, в точке минимума функции f, существование которой доказано выше, должны выполняться необходимые условия экстремума. Отсюда следует, что все критические точки являются точками наименьшего значения функции f на множестве M. Таким образом, получаем ответы: на вопрос в) — Да, на вопрос г) — Нет, на вопрос д) — Нет, на вопрос е) — Нет, на вопрос ж) — Да, на вопрос з) — Нет.

Задача 4. Найдем явный вид функции $f(x)$.

Если $x > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{3n} + 2x^{2n} + 1} = \lim_{n\to\infty} x^3 \sqrt[n]{1 + 2/(x^n) + 1/(x^{3n})} = x^3.$$

Если $x = 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 2 + 1} = 1.$$

Поэтому $f(x) = x^3$ при $x \geqslant 1$.

Если $-1 < x < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{3n} + x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} x^2 \sqrt[n]{x^n + 1} = x^2.$$

Если $x \leqslant -1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(nx) = -\pi/2,$$

и следовательно, $f(x) = -\dfrac{\pi}{2}x$.

Окончательно получаем (см. также рис. 7):

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \geqslant 1, \\ x^2, & \text{если } -1 < x < 1, \\ -\dfrac{\pi}{2}x, & \text{если } x \leqslant -1. \end{cases}$$

Эта функция определена на всей числовой прямой $\mathbf{R}$ и непрерывна во всех точках, кроме $x = -1$. Заметим, что на множестве $[0, +\infty)$ функция $f(x)$ есть максимум двух выпуклых функций x^2 и x^3 и следовательно, является выпуклой на этом множестве. Ответы: на вопрос а) — Нет, на вопрос е) — Да, на вопрос ж) — Да.

Функция $f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = -\dfrac{\pi}{2}x$ при $x \to -\infty$. Ответ на вопрос б) — Да.

Областью значений функции $f(x)$ является, очевидно, множество $[0, +\infty)$, и $f(0) = 0$. Ответы: на вопрос г) — Да, на вопрос з) — Да.

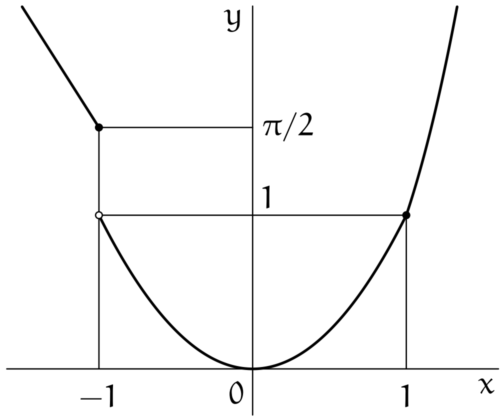


Рис. 7. График функции $f(x)$

Очевидно, что производная $f'(x)$ существует при $x \neq -1$ и $x \neq 1$. Поскольку левая производная функции $f(x)$ в точке $x = 1$ равна 2, а правая равна 3, то $f(x)$ в точке $x = 1$ недифференцируема. Ответы: на вопрос в) — Да, на вопрос д) — Нет.

Задача 5. Точка $0 \in M$ и $f(0) = 0$ (все члены ряда равны нулю).

Если $x < 0$, то $x \notin M$ (четные члены ряда не определены).

Пусть $x > 0$, тогда $\sqrt[n]{x} \leqslant \max\{1, x\} \equiv C(x)$, и исходный ряд (с положительными слагаемыми) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{x}e^{-nx}$ сходится, так как мажорируется суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии $C(x)\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

Следовательно, $M = [0, +\infty)$, и так как все члены ряда положительные, то $f(x) > 0$ для любого $x > 0$.

Таким образом, получаем ответы: на вопрос а) — Да, на вопрос б) — Нет, на вопрос д) — Да.

Пусть $0 < x < 1$. Тогда $\sqrt[n]{x} \geqslant \sqrt{x}$ при $n \geqslant 2$. Следовательно, $f(x) \geqslant xe^{-x} + \sqrt{x}\sum_{n=2}^{\infty} e^{-nx} = xe^{-x} + \dfrac{\sqrt{x}e^{-x}}{1 - e^{-x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x \to 0+$. Это означает, что функция $f(x)$ не ограничена на любом отрезке $[0, a]$, $a > 0$. В частности, функция $f(x)$ не является непрерывной на M. Отсюда вытекает, что ряд не сходится равномерно на любом отрезке $[0, a]$, $a > 0$, а значит, и на множестве M.

Таким образом, получаем ответы: на вопрос в) — Нет, на вопрос г) — Нет, на вопрос е) — Да.

Если $x \in [a, b]$, $a > 0$, то $\sqrt[n]{x}e^{-nx} \leqslant C(b)e^{-na}$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{x}e^{-nx}$ сходится равномерно на $[a, b]$ в силу признака Вейрштрасса, поскольку мажорируется сходящимся числовым рядом.

Таким образом, ответ на вопрос ж) — Да.

Рассмотрим остаток ряда $R_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \sqrt[n]{x}e^{-nx}$. Если $x \in (0, 1)$, то $\sqrt[n]{x} \geqslant \sqrt[m]{x}$ при $n \geqslant m$, поэтому $R_m(x) \geqslant \dfrac{\sqrt[m]{x}e^{-mx}}{1 - e^{-x}} \sim \dfrac{\sqrt[m]{x}e^{-mx}}{x}$. Значит, для любого m существует число $x > 0$, такое, что $R_m(x) \geqslant 1$. Это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{x}e^{-nx}$ на интервале $(0, 1)$ не сходится равномерно.

Таким образом, ответ на вопрос з) — Нет.

6 Вступительный экзамен 2005 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

6.1 Тест

6.1.1 Первая часть теста

1. Предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln^2 x}{x^3-3x+2}$ равен

A 1

B -1

C $1/3$

D 0

E не существует

2. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n}\right)$ равен

A $\sin 1$

B 0

C $1/\sqrt{2}$

D 1

E не существует

3. Предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ равен

A $98/48$

B $99/49$

C $100/50$

D $101/51$

E $102/52$

4. Определенный интеграл $\int_0^1 \arccos x\, dx$ равен

A 0

B -1

C 1

D $1/2$

E $-1/2$

5. Определенный интеграл $\int_{\sqrt{2}}^{2} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ равен

A 0

B $\pi/12$

C $\pi/4$

D $\pi/3$

E не существует

6. Неопределенный интеграл $\int \dfrac{x^3 dx}{x^8+2}$ равен

A $\dfrac{1}{8}\ln(x^8+2)+C$

B $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C$

C $\dfrac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C$

D $\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{x^4}{\sqrt{2}}+C$

E $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x^4}{\sqrt{2}}+C$

7. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — сходящаяся последовательность ненулевых чисел. Тогда

A если у $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть наименьший элемент, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ неубывающая

B последовательность $\{a_{n+1}/a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

C последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

D если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 0$, то последовательность $\{a_{n+1}/a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n <$ < 0

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$. Тогда

A существуют пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$

B функция $f(x)$ имеет разрывы только первого рода

C множество точек разрыва $f(x)$ конечное (или пустое)

D функция $\dfrac{1}{1+f^2(x)}$ интегрируема по Риману на $[a, b]$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть x — изолированная точка подмножества M вещественной прямой $\mathbf{R}$. Тогда

A x — предельная точка множества M

B x — внутренняя точка множества M

C x — внешняя точка множества M

D x — граничная точка множества M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. В пространстве $\mathbf{R}^N$, $N \geqslant 2$, задана система векторов $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, которая разбита на две подсистемы $X_1 = \{x_1, \ldots, x_k\}$ и $X_2 = \{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$, где $1 \leqslant k < n$. Известно, что линейные оболочки систем X_1 и X_2 совпадают. Тогда

A если система X линейно независимая, то она линейно зависимая

B если система X линейно зависимая, то она линейно независимая

C	если $n = 2k$, то системы X_1 и X_2 обе линейно независимые

D	если $n = 2k$, то система X линейно независимая

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. В пространстве $\mathbf{R}^n$ заданы три подпространства L_1, L_2 и L_3, размерности которых равны n_1, n_2 и n_3, соответственно. При этом $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Тогда

A	если $(L_1 + L_2) \cap L_3 = \{0\}$, то $L_1 + L_2 + L_3 = \mathbf{R}^n$

B	если $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{0\}$, то $L_1 + L_2 + L_3 = \mathbf{R}^n$

C	если $L_1 + L_2 + L_3 = \mathbf{R}^n$, то сумма $L_1 + L_2$ прямая

D	$(L_1 + L_2) \cap L_3 = (L_1 \cap L_3) + (L_2 \cap L_3)$

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Две вещественные матрицы A и B имеют размеры $m \times n$ и $n \times m$, соответственно, где $m \geqslant 2$ и $n \geqslant 2$. Тогда

A	если матрица AB невырожденная, то системы $Ax = a$ и $By = b$ имеют решения при любых правых частях a и b подходящих размерностей

B	если системы $Ax = a$ и $By = b$ имеют решения при любых $a \in \mathbf{R}^m$ и $b \in \mathbf{R}^n$, то матрица AB невырожденная

C	если система $(AB)y = 0$ имеет только нулевое решение, то матрицы A и B обе имеют линейно независимые столбцы

D	если матрица AB невырожденная, то размерности подпространств решений систем $Ax = 0$ и $By = 0$ совпадают

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Вещественная прямоугольная матрица A имеет размеры $m \times n$. Тогда

A	если $\det(AA^T) \neq 0$, то $\det(A^T A) \neq 0$

B	если $\det(AA^T) = \det(A^T A)$, то $m = n$

C	$\det(I + 2AA^T) \neq 0$

D	если столбцы матрицы A линейно независимые, то $\det(AA^T) \neq 0$

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Пусть A — линейный оператор, действующий из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$. Тогда

A	$\mathbf{R}^n = \operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A$

B если $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$, то $\operatorname{Im} A \neq \mathbf{R}^n$

C $\operatorname{Im} A^2 = \operatorname{Im} A$

D $\mathbf{R}^n \neq \operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. Задана вещественная квадратная матрица A порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A если матрица $(A^3 - I)$ вырожденная, то единица является собственным числом матрицы A

B если у матрицы A^2 имеется собственное число 1, то у нее имеется и собственное число -1

C если матрица A вырожденная, то у матрицы $(I + A)^2$ имеется собственное число 1

D если единственным собственным числом матрицы A является 0, то матрица A нулевая

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Задана вещественная квадратная матрица A порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A если $A^2 = A$, то матрица A задает оператор ортогонального проектирования

B если A ортогональная симметричная матрица, то матрица A^2 задает оператор проектирования

C если характеристический многочлен матрицы A имеет вид $p(\lambda) = \lambda^k(1-\lambda)^{n-k}$, то матрица A задает оператор проектирования

D если матрица A ортогональная и λ — вещественное собственное число матрицы A^2, то $\lambda = 1$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Задана квадратная вещественная матрица A порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A матрица (AA^{T}) положительно определенная

B если матрица A симметричная, то матрица A^2 положительно определенная

C если у матрицы A все собственные числа строго положительные, то $\det(A + A^{\mathsf{T}}) > 0$

D если матрица A симметричная, невырожденная и не является ни отрицательно, ни положительно определенной, то $\det A < 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

18. На непустом подмножестве M вещественной прямой $\mathbf{R}$ задана функция $f\colon M \to \mathbf{R}$. Пусть множество $G \subset \mathbf{R}^2$ является графиком функции f, т. е. $G = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$. Тогда

A если функция f непрерывна на M, то множество G замкнутое

B если множество G замкнутое, то функция f непрерывна на M

C замыкание $\overline{G}$ множества G является графиком некоторой функции, заданной на замыкании множества M

D если множество G не является замкнутым, то функция f не является непрерывной на M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ задана формулами: $x_0 = 3/2$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $n = 0, 1, \dots$. Тогда

A $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

B $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$

C точки 1 и 2 являются предельными для последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$

D $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

E $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

20. Функция $u(x)$ определена на полупрямой $[0, +\infty)$ и непрерывна на ней, а ее первые две производные существуют и непрерывны на $(0, +\infty)$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Если $u'(x) > 0$ и $u''(x) < 0$, то $u(x)$ равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$.

II. Если $u'(x) < 0$ и $u''(x) > 0$, то $u(x)$ равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$.

III. Если $u'(x) < 0$ и $u''(x) < 0$, то $u(x)$ равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$.

A только I

B только II

C только I и II

D I, II и III

E все утверждения I, II, III ложные

21. Коэффициент при x^6 в разложении в ряд Тейлора функции $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ в точке $x = 0$ равен

A $\quad 720$

B $\quad 120$

C $\quad 1/720$

D $\quad 1$

E $\quad 0$

22. Наибольшее значение функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ на множестве точек, удовлетворяющих уравнению $x^2 + 2y^2 = 3$, достигается:

A $\quad$ только в точке $(0, \sqrt{3/2})$

B $\quad$ только в точке $\left(\sqrt{3}, 0\right)$

C $\quad$ только в точках $\left(\sqrt{3}, 0\right)$ и $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$

D $\quad$ только в точках $(0, \sqrt{3/2})$ и $(0, -\sqrt{3/2})$

E $\quad$ только в точках $(\sqrt{3}, \sqrt{3/2})$ и $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3/2})$

23. Неявная функция $y = y(x)$ определяется как решение уравнения $3xy - 5x^2 + 5y^3 - 2x^2y = 1$. Тогда производная $\dfrac{dy}{dx}(1)$ равна

A $\quad 1$

B $\quad 11/16$

C $\quad 18/11$

D $\quad 11/18$

E $\quad -11/18$

24. Наибольшее значение функции $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x$ на отрезке $[-2, 10/3]$ равно

A $\quad 1210/27$

B $\quad 30$

C $\quad -6$

D $\quad 1694/27$

E $\quad$ другому числу

25. Функция $f(x)$ задана формулой

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x-4, & x\leqslant 1,\\ 5x-5, & x>1. \end{cases}$$

Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ непрерывна на $\mathbf{R}$.

II. Функция $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ имеет непрерывную первую производную на $\mathbf{R}$.

III. Функция $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ имеет непрерывную вторую производную на $\mathbf{R}$.

A только I

B только II

C только III

D только I и II

E I, II и III

26. Пусть $f(x)=\max\{6x^2+5x-3,\ 8-5x-x^2\}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$.

II. Функция $f(x)$ выпукла на $\mathbf{R}$.

III. Функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную в любой точке $\mathbf{R}$.

A только I

B только II

C только I и II

D только I и III

E I, II и III

27. Пусть $K\subset\mathbf{R}$ – непустое компактное множество, $a=\inf K$, $b=\sup K$, и $f(x)$ – непрерывная на K функция. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на K.

II. Если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на K во внутренней точке $x_0\in K$, то существует производная $f'(x_0)$ и $f'(x_0)=0$.

III. Если функция $f(x)$ дифференцируема в каждой внутренней точке K, то она достигает наибольшего значения на K либо в точке, в которой производная $f'(x)$ обращается в ноль, либо в одной из точек a и b.

A только I

B только II

C только III

D только I и II

E только I и III

28. К графику функции $f(x) = 9x - x^3$ в точке с абсциссой $x = 2$ проведена касательная. Площадь треугольника, образованного касательной и отрезками, отсекаемыми ею на осях координат, равна

A 128/3

B 256/3

C 36

D 240/7

E 136/3

29. Пусть $f(x) = \int_x^{x+1} yg(y)dy$, где $g(y) = -1$, если $y < 0$, и $g(y) = 1$, если $y \geqslant 0$. Тогда

A $f'(0) = 0$

B $f'(0) = 1$

C производная $f'(x)$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода

D $f'(0)$ не существует

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на всей числовой прямой $\mathbf{R}$.

II. Существует $\delta > 0$, такое что $f(x) \leqslant x^4$ для любого $x \in (-\delta, \delta)$.

III. Функция $f(x)$ является выпуклой на всей числовой прямой $\mathbf{R}$.

A только I

B только II

C только III

D только I и II

E I, II и III

31. Функция $f(x)$ задана и непрерывна на всей числовой прямой, a и b — вещественные числа. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+3}^{b+3} f(x)dx$

II. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^3 f(x)dx - \int_b^3 f(x)dx$

III. $\int_{3a}^{3b} f(x)dx = 3\int_a^b f(x)dx$

A только I

B только II

C только I и II

D только II и III

E I, II и III

32. Пусть M — подмножество плоскости xOy, где сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(4x-5y)^n$. Тогда

A M — ограниченное множество

B M совпадает со всей плоскостью xOy

C внутренность множества M — открытый круг положительного радиуса

D внутренность множества M — открытая полуплоскость

E внутренность множества M — пустое множество

33. Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая на $\mathbf{R}$ функция, для которой существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$. Тогда

A $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

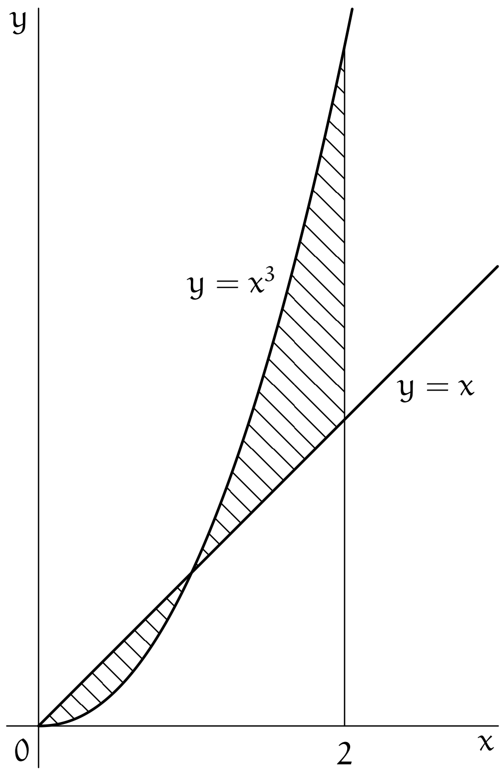
B $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = 0$

C $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$

D $f(x)$ — постоянная функция

E $f'(x)$ — постоянная функция

34. На рисунке изображены графики функций $y = x$ и $y = x^3$.



Площадь заштрихованной фигуры равна

A 5/2

B 2

C 7/4

D 9/4

E 3

35. Вода вытекает из бака со скоростью, пропорциональной объему воды, остающейся в баке. Через 30 сек. после начала вытекания в баке оставалась половина первоначального объема воды. Через какое время в баке останется треть начального объема?

A 45 сек.

B $30 \ln 2$ сек.

C $30 \ln 3$ сек.

D $30 \log_2 3$ сек.

E 60 сек.

36. Выберите *неверное* утверждение.

A Существует бесконечное множество в $\mathbf{R}^n$, не имеющее предельных точек

B Дополнение любого незамкнутого множества в $\mathbf{R}^n$ не является открытым

C Существует открытое множество в $\mathbf{R}^n$, содержащее хотя бы одну свою граничную точку

D Если некоторая граничная точка множества M в $\mathbf{R}^n$ не принадлежит M, то множество M бесконечно

E Существует замкнутое множество в $\mathbf{R}^n$, дополнение к которому замкнуто

37. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ задана равенствами

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{x_n},\ n = 1, 2, \dots .$$

Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ ограничена.

II. Существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ не ограничена.

III. Существует такое число $x_1 > 0$, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует.

A только I

B только II

C только I и II

D только I и III

E I, II и III

38. Функция $f(x, y) = x^3 + y^3$ достигает наименьшего значения на множестве $M = \{(x, y)\colon x^2 - xy + y^2 = 5\}$ в точке (точках)

A $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$

B $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right), \left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$

C $\left(0, -\sqrt{5}\right), \left(-\sqrt{5}, 0\right)$

D $\left(-\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$

E ни один из вариантов ответов A, B, C, D не является верным

39. Функция $f(x, y) = x^2 + y^3$ достигает наименьшего значения на множестве $M = \{(x, y)\colon x + y = 4/3\}$ в точке (точках)

A $\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

B $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

C $\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

D $f(x, y)$ не достигает наименьшего значения на множестве M

E ни один из вариантов ответов A, B, C, D не является верным

40. Значение максимального решения задачи Коши $y' = -y/x + 2$ при начальном условии $y(1) = 1$ в точке $x = 2$ равно

A $1/2$

B 1

C $3/2$

D 2

E не определено

6.1.2 Вторая часть теста

1. Функция $f(x)$ задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{t^3\,dt}{\sqrt{t^4+9}}, & \text{если } x \leqslant -2, \\ \displaystyle\int_{x-1}^x \frac{6\,dt}{t^2}, & \text{если } -2 < x < 1, \\ \displaystyle\int_1^x \left(1 - e^{-t^2}\right) dt, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Обозначим через M множество, на котором определена функция $f(x)$ (соответствующий интеграл существует). Тогда

а) множество M открыто;

Да Нет

б) множество M замкнуто;

Да Нет

в) функция $f(x)$ непрерывна на M;

Да Нет

г) функция $f(x)$ равномерно непрерывна на M;

Да Нет

д) функция $f(x)$ дифференцируема в каждой внутренней точке множества M;

Да Нет

е) функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на M;

Да Нет

ж) функция $f(x)$ достигает наименьшего значения на M;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту;

Да Нет

2. Вещественная квадратная матрица A третьего порядка имеет три различных собственных числа λ_1, λ_2, λ_3, которым соответствует система собственных векторов $\{x_1, x_2, x_3\}$, где

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\{y_1, y_2, y_3\}$ систему собственных векторов транспонированной матрицы A^T, соответствующих собственным числам λ_1, λ_2, λ_3 (в том же порядке). Пусть L_1 — линейная оболочка системы $\{x_1\}$, L_2 — линейная оболочка системы $\{x_2, x_3\}$, L_3 — линейная оболочка системы $\{y_2, y_3\}$. Через P обозначим проектор на L_1 параллельно L_2, а через Q — проектор на L_1 параллельно L_3. Тогда

а) матрица A не симметричная;

Да Нет

б) проектор P ортогональный;

Да Нет

в) проектор Q ортогональный;

Да Нет

г) $PQ = Q$;

Да Нет

д) $QP = P$;

Да Нет

е) число нулевых элементов матрицы P равно двум;

Да Нет

ж) число нулевых элементов матрицы Q равно двум;

Да Нет

з) сумма элементов матрицы Q равна $1/\sqrt{3}$.

Да Нет

3. Пусть a, b, α, x — положительные числа. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ определяется следующим образом:

$$x_1 = x, \quad x_{n+1} = ax_n^\alpha + b, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Тогда

а) если $\alpha < 1$ и $x < b$, то при любом $a > 0$ последовательность $\{x_n\}$ является возрастающей;

Да Нет

б) если $\alpha > 1$, то существуют такие числа $a > 0$, $b > 0$, что при любом $x > 0$ последовательность $\{x_n\}$ расходится;

Да Нет

в) если $\alpha < 1$, то для любых $a > 0$, $b > 0$ существует такое число $x > 0$, что последовательность $\{x_n\}$ расходится;

Да Нет

г) если $a = 3/16$, $b = 1$, $\alpha = 2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$.

Да Нет

4. Для каждого числа a определим функцию $g(x,a)$ следующим образом:

$$g(x,a) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < a, \\ x - a, & \text{если } x \geqslant a. \end{cases}$$

Пусть $f(x,a) = \displaystyle\int_x^{x^2+1} g(y,a)\,dy$. Тогда

а) для любого интервала (c,d) существует такое число a, что функция $f(x,a)$ дифференцируема по x при любом $x \in (c,d)$;

Да Нет

б) функция $f(x,1)$ равномерно непрерывна по x на множестве $(-\infty, 0]$;

Да Нет

в) $\min\limits_{x\in[0,2]} f(x,2) = -1$, $\max\limits_{x\in[0,2]} f(x,2) = 9/2$;

Да Нет

г) существует такое число a, что график функции $f(x,a)$ имеет наклонную асимптоту.

Да Нет

5. Функции $y_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определяются как максимальные (непродолжаемые) решения дифференциального уравнения

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x},$$

удовлетворяющие условию $y(1) = n$. Пусть $z_n(x) = x \cdot y_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

а) Каждая функция $y_n(x)$ определена при всех положительных x;

Да Нет

б) Каждая функция $z_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $z' + 2z = e^{-x^2}$ и условию $z(1) = n$;

Да Нет

в) Каждая функция $z_n(x)$ равномерно непрерывна на своей области определения;

Да Нет

г) Каждая функция $z_n(x)$ имеет конечный предел при $x \to 0$;

Да Нет

д) Последовательность $y_n(x)$ расходится в любой точке $x \in (0, 1)$;

Да Нет

е) Существует отрезок $[a, b]$, на котором определены все функции $z_n(x)$, и на котором последовательность $z_n(x)$ сходится равномерно;

Да Нет

ж) Существует такое n, что функция $y_n(x)$ сохраняет знак на своей области определения;

Да Нет

з) Существует n такое, что функция $x \cdot z_n(x)$ ограничена на своей области определения.

Да Нет

6. Дана функция $f(x, y, z) = xy^2 - z$ и множество $M = \{(x, y, z)\colon x^2 + 4y^2 + z^2 = 7\}$. Тогда

а) функция $f(x, y, z)$ достигает наибольшего значения на множестве M в единственной точке;

Да Нет

б) функция $f(x, y, z)$ достигает наименьшего значения на множестве M в единственной точке;

Да Нет

в) наибольшее значение функции $f(x, y, z)$ на множестве M равно $5/2$;

Да Нет

г) наибольшее значение функции $f(x, y, z)$ на множестве M равно $2\sqrt{\dfrac{7}{3}}$;

Да Нет

д) наименьшее значение функции $f(x, y, z)$ на множестве M равно $-\sqrt{7}$;

Да Нет

е) наименьшее значение функции $f(x, y, z)$ на множестве M равно $-\dfrac{4}{3\sqrt{3}} - \sqrt{3}$;

Да Нет

ж) точка $\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -2\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M;

Да Нет

з) точка $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\dfrac{2}{3}}, -\sqrt{3}\right)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M.

Да Нет

6.2 Ответы и решения теста

6.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. C. **2.** B. **3.** A. **4.** C. **5.** B. **6.** E. **7.** E. **8.** D. **9.** D. **10.** A. **11.** C. **12.** B. **13.** C. **14.** B. **15.** C. **16.** B. **17.** E. **18.** E. **19.** A. **20.** C. **21.** E. **22.** C. **23.** B. **24.** A. **25.** E. **26.** A. **27.** A. **28.** A. **29.** B. **30.** D. **31.** B. **32.** E. **33.** A. **34.** A. **35.** D. **36.** C. **37.** B. **38.** D. **39.** D. **40.** D.

6.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Сначала найдем явный вид функции $f(x)$ (где это возможно) и множество M, на котором она определена.

Если $x \leqslant -2$, то подынтегральная функция непрерывна и ограничена на отрезке $[x, 0]$. Следовательно, функция $f(x)$ определена при этих x. Произведя замену переменной $z = \sqrt{t^4+9}$, $dz = \dfrac{2t^3dt}{\sqrt{t^4+9}}$, получим:

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^3dt}{\sqrt{t^4+9}} = \int_3^{\sqrt{x^4+9}} \frac{1}{2}dz = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^4+9} - 3\right).$$

Если $-2 < x < 1$, то подынтегральная функция не при всех x ограничена на отрезке $[x-1, x]$. А именно, если $0 \leqslant x < 1$, то $0 \in [x-1, x]$, и $f(x)$ не определена. При $-2 < x < 0$ имеем:

$$f(x) = \int_{x-1}^x \frac{6dt}{t^2} = \left(-\frac{6}{t}\right)\Big|_{x-1}^x = 6\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{6}{(x-1)x}.$$

Если $x \geqslant 1$, то соответствующий интеграл не выражается в элементарных функциях (при $x = 1$ функция $f(x) = 0$), но он существует при всех $x \geqslant 1$, так как подынтегральная функция непрерывна и ограничена на отрезке $[1, x]$.

Таким образом, функция $f(x)$ определена на множестве $M = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ и равна

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^4+9} - 3\right), & \text{если } x \leqslant -2, \\ \dfrac{6}{(x-1)x}, & \text{если } -2 < x < 0, \\ (x-1) - \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}dt, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Множество M не является ни открытым, ни замкнутым (вопрос а) — «Нет», вопрос б) — «Нет»).

Функция $f(x)$ непрерывна на каждом из трех отрезков. Поэтому единственная точка, в которой $f(x)$ могла бы иметь разрыв, это точка $x = -2$. Предел слева равен

$$\lim_{x\to-2-0} f(x) = f(-2-0) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(-2)^4+9}-3\right) = 1.$$

Предел справа равен

$$\lim_{x\to-2+0} f(x) = \lim_{x\to-2+0} \frac{6}{(x-1)x} = \frac{6}{(-2-1)(-2)} = 1.$$

Значит функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = -2$, а значит и на всем множестве M (вопрос в) — «Да»).

Предел

$$\lim_{x\to0-0} f(x) = \lim_{x\to0-0} \frac{6}{(x-1)x} = +\infty.$$

То есть функция $f(x)$ неограничена на M в окрестности точки $x = 0$. Следовательно, она не может быть равномерно непрерывной на M (вопрос г) — «Нет»). Кроме того, функция $f(x)$ не достигает наибольшего значения на M (вопрос е) — «Нет»).

Аналогично пункту в) единственная точка, в которой функция $f(x)$ может быть недифференцируемой, это точка $x = -2$. Так как $f(x)$ в этой точке непрерывна, и каждая из функций $\left(\sqrt{x^4+9}-3\right)/2$ и $6/((x-1)x)$ дифференцируема в точке $x = -2$, то достаточно проверить, совпадают ли левая и правая производные функции $f(x)$. Левая производная:

$$f'(-2-0) = \left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^4+9}-3\right)\right)'\Bigg|_{x=-2} = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\Bigg|_{x=-2} = -\frac{8}{5}.$$

Правая производная:

$$f'(-2+0) = \left(\frac{6}{(x-1)x}\right)'\Bigg|_{x=-2} = \left(\frac{6}{x^2} - \frac{6}{(x-1)^2}\right)\Bigg|_{x=-2} = \frac{5}{6}.$$

Так как левая и правая производные не совпадают, то функция $f(x)$ не является дифференцируемой в точке $x = -2$ (вопрос д) — «Нет»).

Заметим, что на интервале $(-\infty, -2)$ функция $f(x)$ убывает (производная отрицательная), а на интервале $(-2, 0)$ функция $f(x)$ возрастает. Следовательно, функция $f(x)$ в точке $x = -2$ достигает наименьшего значения на интервале $(-\infty, 0)$, причем $f(-2) = 1$. На множестве $[1, +\infty)$ функция $f(x)$ возрастает, и $f(1) = 0$. Следовательно, наименьшее значение функции $f(x)$ достигается в точке $x = 1$ (вопрос ж) — «Да»).

Проверим теперь наличие наклонной асимптоты. При $x \to -\infty$ функция $f(x)$ ведет себя как $f(x) \sim \sqrt{x^4} = x^2$. Следовательно асимптоты нет.

Рассмотрим поведение $f(x)$ при $x \to +\infty$. Для этого заметим, что функция e^{-x^2} убывает очень быстро ($e^{-x^2} < 1/x^2$), и

$$\int_1^x e^{-t^2}dt < \int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x} < 1.$$

Так как функция $\int_1^x e^{-t^2}dt$ возрастающая, то существует предел

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x e^{-t^2}dt = A, \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \int_1^x e^{-t^2}dt < A \quad \text{при всех } x \geqslant 1.$$

Рассмотрим отношение $f(x)/x$.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x-1}{x} - \frac{\int_1^x e^{-t^2}dt}{x}.$$

Нетрудно видеть, что предел этого отношения при $x \to +\infty$ равен 1.

Далее,

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 1\cdot x) = -1 - \lim_{x\to+\infty}\int_1^x e^{-t^2}dt = -1 - A.$$

Следовательно, у функции $f(x)$ существует наклонная асимптота $x - 1 - A$ (вопрос з) — «Да»).

График функции $f(x)$ изображен на рис. 8.

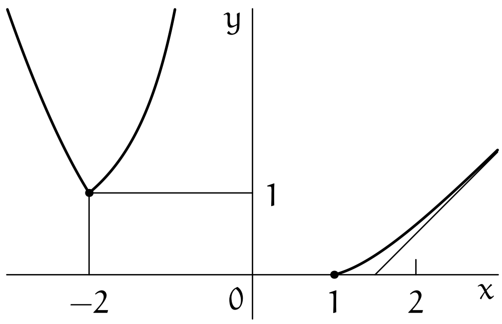


Рис. 8. График функции $f(x)$

Задача 2. Матрица A не может быть симметричной, так как ее собственные векторы x_1 и x_2, соответствующие различным собственным числам, не ортогональны друг другу. Ответ на первый вопрос: а) «Да». Так как вектор $x_2 \in L_2$ не ортогонален вектору $x_1 \in \in L_1$, то подпространство L_2 не служит ортогональным дополнением к L_1, и проектор P не является ортогональным. В то же время векторы y_2 и y_3 ортогональны вектору x_1. Действительно, по условию задачи $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $A^T y_2 = \lambda_2 y_2$ и $A^T y_3 = \lambda_3 y_3$. Поэтому

$$\lambda_2(y_2^T x_1) = (\lambda_2 y_2)^T x_1 = (y_2^T A)x_1 = y_2^T(Ax_1) = \lambda_1(y_2^T x_1),$$

а так как $\lambda_2 \neq \lambda_1$, то $y_2^T x_1 = 0$. Аналогично устанавливается равенство $y_3^T x_1 = 0$. Поэтому подпространства L_1 и L_3, натянутые, соответственно, на системы векторов $\{x_1\}$ и $\{y_2, y_3\}$, ортогональны друг другу. Кроме того, система $\{y_2, y_3\}$ линейно независимая, так как y_2 и y_3 — собственные векторы A^T, соответствующие различным собственным числам (λ_2 и λ_3). Так что $\dim L_3 = 2$, а $\dim L_1 = 1$. Таким образом, L_3 служит ортогональным дополнением к L_1, и проектор Q ортогональный. Ответы на второй и третий вопросы: б) «Нет», в) «Да».

Оба проектора в качестве своего образа имеют подпространство L_1, причем $Px = Qx = x$ для всех $x \in L_1$. Поэтому при любом $z \in \mathbf{R}^3$ имеем $Pz \in L_1$ и $Qz \in L_1$, так что $(PQ)z = P(Qz) = Qz$ и $(QP)z = Q(Pz) = Pz$, то есть $PQ = Q$ и $QP = P$. Ответы на четвертый и пятый вопросы: г) «Да», д) «Да».

Ранги проекторов P и Q равны размерности подпространства L_1, то есть 1, а любая матрица ранга 1 имеет вид uv^T, где u и v — ненулевые столбцы. При этом $Px_1 = x_1$ и $Qx_1 = x_1$, то есть для обеих матриц $(v^T x_1)u = x_1$. Можно положить $u = x_1$, а нормировку v выбрать из условия $v^T x_1 = 1$. Для проектора P имеем еще два условия: $Px_2 = Px_3 = 0$, то есть $v^T x_2 = v^T x_3 = 0$. Этими тремя условиями столбец v определяется однозначно: $v^T = (-1, 1, -1)$. Для проектора Q, ввиду его ортогональности, должно выполняться равенство $Q^T = Q$, то есть $v = \alpha x_1$, где $\alpha = 1/(x_1^T x_1) = 1/3$. Таким образом,

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответы на последние три вопроса: е) «Нет», ж) «Нет», з) «Нет».

Задача 3. Приведенное ниже решение не является абсолютно строгим, поскольку частично оно основано на графиках, но для получения правильных ответов его можно использовать.

а) Из графика (см. рис. 9) видно, что если $x < c$, где c — абсцисса точки пересечения

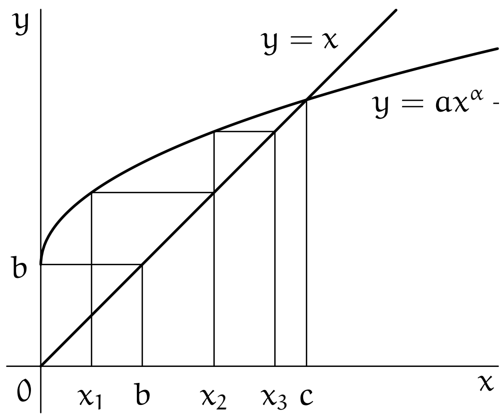


Рис. 9

графиков функций $y = x$ и $y = ax^\alpha + b$ (такая точка существует и единственна, поскольку $\alpha < 1$, $a > 0$, $b > 0$), то последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ является возрастающей. Ясно, что $b < c$, поэтому правильный ответ «Да».

б) Из графика (см. рис. 10) видно, что достаточно выбрать числа $a > 0$, $b > 0$ таким образом, чтобы при всех $x \geqslant 0$ выполнялось неравенство $x < ax^\alpha + b$. Это можно сделать,

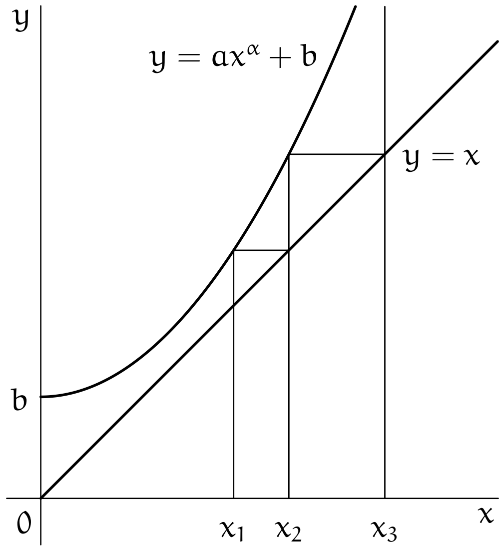


Рис. 10

поскольку $\alpha > 1$. Тогда при любом $x > 0$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ будет расходящейся, точнее, последовательность будет стремиться к $+\infty$. Ответ «Да».

в) Из графика (см. рис. 11) видно, что если $\alpha < 1$, то при любых $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$

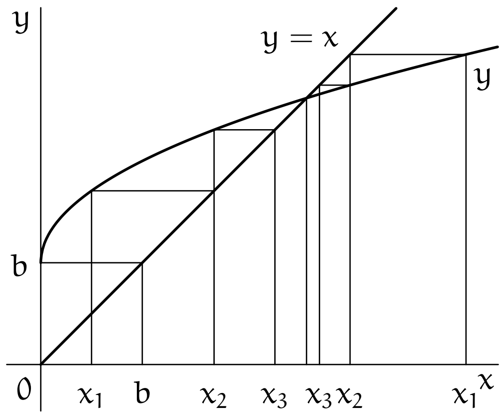


Рис. 11

последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ является сходящейся. Ответ «Нет».

г) Графики функций $y = x$ и $y = \dfrac{3}{16}x^2 + 1$ пересекаются в точках $(4/3, 4/3)$ и $(4, 4)$ (см. рис. 12). Из рисунка видно, что если $x \neq 4$, то либо последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ расходится (если $x > 4$), либо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4/3$ (если $0 < x < 4$). Ответ «Нет».

Задача 4. Функция $g(x, a)$ разрывна в точке $x = a$, непрерывна во всех остальных точках x (см. рис. 13).

а) При любом x выполняется неравенство $x < x^2 + 1$. Поэтому если $a < c$, то на отрезке $[x, x^2+1]$ функция $g(y, a)$ есть $y - a$ при любом $x \in (c, d)$. Так как эта функция непрерывна в точках x, $x^2 + 1$, то $f(x, a)$ дифференцируема в каждой точке интервала (c, d). Ответ «Да».

б) Нетрудно видеть, что если $x \to -\infty$, то $f(x, 1)$ имеет порядок роста Cx^4, где $C > 0$ и поэтому не может быть равномерно непрерывной. Ответ «Нет».

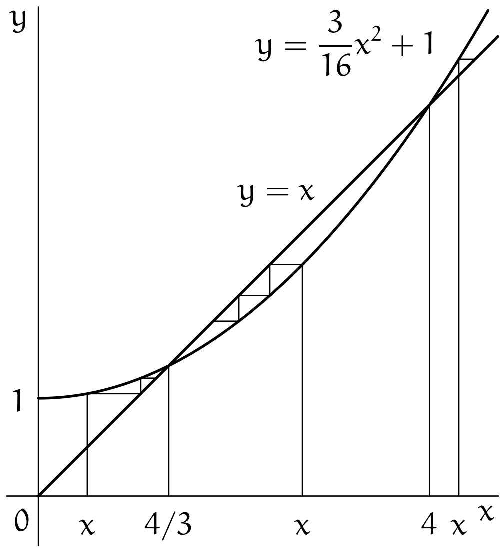


Рис. 12

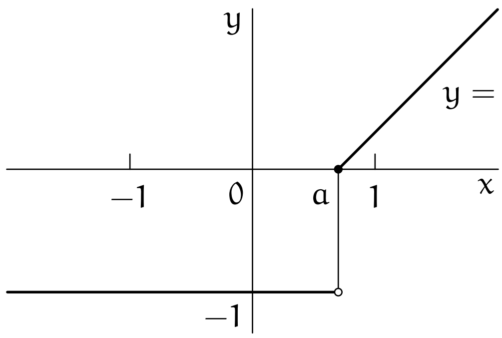


Рис. 13

в) Прямыми вычислениями получаем явное выражение для функции $f(x,2)$:

$$f(x,2) = \begin{cases} f_1(x) = -x^2 + x - 1, & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ f_2(x) = x - 2 + \dfrac{(x^2-1)^2}{2}, & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Функция $f_1(x)$ отрицательна при всех x, и на отрезке $[0,1]$ принимает наименьшее значение в точках $x = 0$, $x = 1$, при этом $f_1(0) = f(1) = -1$. Функция $f_2(x)$ на отрезке $[1,2]$ возрастает и, следовательно, принимает наибольшее значение при $x = 2$, при этом $f_2(2) = 9/2$. Ответ «Да».

г) Для любого a при $x \to \pm\infty$ функция $f(x,a)$ растет как Cx^4, где $C > 0$, поэтому наклонной асимптоты иметь не может. Ответ «Нет».

Задача 5. Соответствующее однородное уравнение $y' + \dfrac{2y}{x} = 0$ имеет общее решение $y = \dfrac{c}{x^2}$. Будем искать решение исходного неоднородного уравнения в виде $y = \dfrac{c(x)}{x^2}$. Подставляя, получим $c'(x) = xe^{-x^2}$, так что $c(x) = \dfrac{K - e^{-x^2}}{2}$ и $y(x) = \dfrac{K - e^{-x^2}}{2x^2}$. Константа K находится из начального условия $y_n(1) = n$. Окончательно, $y_n(x) = \dfrac{2n + e^{-1} - e^{-x^2}}{2x^2}$ и $z_n(x) = \dfrac{2n + e^{-1} - e^{-x^2}}{2x}$.

Видно, что все функции $y_n(x)$ определены для всех положительных x. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $z_n(x)$ не удовлетворяют уравнению $z' + 2z = e^{-x^2}$. Далее, $z_n(x)$ в окрестности точки $x = 0$ ведет себя как $1/x$, так что не является равномерно непрерывной и не имеет конечного предела.

Последовательность $y_n(x)$ расходится при каждом $x > 0$. То же можно сказать и про последовательность $z_n(x)$, так что сходиться равномерно она ни на каком отрезке не может. Числитель выражения для $y_n(x)$ ограничен снизу числом $2n + e^{-1} - 1$ и положителен при любом n, так что значение $y_n(x)$ положительно при любых n и x. Наконец, функция $x \cdot z_n(x) = \dfrac{2n + e^{-1} - e^{-x^2}}{2}$ ограничена на множестве $x > 0$ в силу ограниченности на этом множестве функции e^{-x^2}.

Таким образом, получаем ответы: на вопрос а) — «Да», на вопрос б) — «Нет», на вопрос в) — «Нет», на вопрос г) — «Нет», на вопрос д) — «Да», на вопрос е) — «Нет», на вопрос ж) — «Да», на вопрос з) — «Да».

Задача 6. Так как множество допустимых точек является непустым компактом, а целевая функция непрерывна, то ее наибольшее и наименьшее значения достигаются, а соответствующие точки находятся среди стационарных точек (так как все допустимые точки регулярные).

Функция Лагранжа для этой задачи следующая:

$$L = xy^2 - z - \lambda(x^2 + 4y^2 + z^2 - 7).$$

Дифференцируя по x, y и z, получим систему уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y^2 - 2x\lambda = 0, \tag{1}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2xy - 8y\lambda = 0, \tag{2}$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = -1 - 2z\lambda = 0. \tag{3}$$

Из последнего уравнения следует, что в стационарной точке $z \neq 0$ и $\lambda \neq 0$. Таким образом, $\lambda = -\frac{1}{2z}$. Отсюда и из уравнения (2) следует, что $2y\left(x + \frac{2}{z}\right) = 0$.

Если при этом $y = 0$, то из (1) следует, что $x = 0$. Тогда $z = \pm\sqrt{7}$, и значения целевой функции $f = \mp\sqrt{7}$.

Если $y \neq 0$, то $x = -\frac{2}{z}$ и из (1) получим $y^2 = \frac{2}{z^2}$. Подставив эти соотношения в ограничение $x^2 + 4y^2 + z^2 = 7$, получим уравнене:

$$\frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^2} + z^2 - 7 = 0.$$

Отсюда находим решения: $z^2 = 3$ или $z^2 = 4$. Соответственно, $z = \pm\sqrt{3}$ или $z = \pm 2$.

Следовательно, все стационарные точек следующие:

$$\begin{aligned}
&A_1 = \left(0, 0, \sqrt{7}\right), && \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{7}}, && f(A_1) = -\sqrt{7},\\
&A_2 = \left(0, 0, -\sqrt{7}\right), && \lambda = \frac{1}{2\sqrt{7}}, && f(A_2) = \sqrt{7},\\
&A_3 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{3}\right), && \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{3}}, && f(A_3) = -\frac{4}{3\sqrt{3}} - \sqrt{3},\\
&A_4 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{3}\right), && \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{3}}, && f(A_4) = -\frac{4}{3\sqrt{3}} - \sqrt{3},\\
&A_5 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{3}\right), && \lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}}, && f(A_5) = \frac{4}{3\sqrt{3}} + \sqrt{3},\\
&A_6 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{3}\right), && \lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}}, && f(A_6) = \frac{4}{3\sqrt{3}} + \sqrt{3},\\
&A_7 = \left(-1, \sqrt{\frac{1}{2}}, 2\right), && \lambda = -\frac{1}{4}, && f(A_7) = -\frac{5}{2},\\
&A_8 = \left(-1, -\sqrt{\frac{1}{2}}, 2\right), && \lambda = -\frac{1}{4}, && f(A_8) = -\frac{5}{2},\\
&A_9 = \left(1, \sqrt{\frac{1}{2}}, -2\right), && \lambda = \frac{1}{4}, && f(A_9) = \frac{5}{2},\\
&A_{10} = \left(1, -\sqrt{\frac{1}{2}}, -2\right), && \lambda = \frac{1}{4}, && f(A_{10}) = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, можно ответить на первые 6 вопросов: а) — «Да», б) — «Да», в) — «Нет», г) — «Нет», д) — «Да», е) — «Нет».

Чтобы ответить на оставшиеся вопросы, вычислим вторую производную функции Лагранжа.

$$D^2L = \begin{pmatrix} -2\lambda & 2y & 0 \\ 2y & 2x-8\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}.$$

Эта производная в точке $\left(1, \sqrt{\frac{1}{2}}, -2\right)$ равна:

$$D^2L = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Допустимые значения вариаций (векторы, ортогональные градиенту уравнения связи $(2x, 8y, 2z)$) определяются уравнением $dx + 2\sqrt{2}dy - 2dz = 0$. Выразим dx и найдем значения квадратичной формы D^2L на этих векторах. Получим:

$$\begin{pmatrix} 2dz - 2\sqrt{2}dy & dy & dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2dz - 2\sqrt{2}dy \\ dy \\ dz \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} dy & dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & -5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

Эта квадратичная форма не является положительно полуопределенной, поэтому данная стационарная точка не является точкой локального минимума (вопрос ж) — «Нет»).

Вычислим вторую производную функции Лагранжа в точке $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{3}\right)$:

$$D^2L = -\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Допустимые значения вариаций в этой точке определяются уравнением $2dx - 4\sqrt{2}dy - 3dz = 0$. Выразим dx и найдем значения квадратичной формы D^2L на этих векторах. Получим:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3/2dz + 2\sqrt{2}dy & dy & dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2dz + 2\sqrt{2}dy \\ dy \\ dz \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} dy & dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 13/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

Эта квадратичная форма является отрицально определенной, поэтому данная стационарная точка является точкой локального максимума (вопрос з) — «Да»).

7 Вступительный экзамен 2006 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

7.1 Тест

7.1.1 Первая часть теста

1. Пусть A и B — две вещественные прямоугольные матрицы, имеющие размеры, соответственно, $m \times n$ и $s \times n$. Обозначим через L_1 множество решений системы $Ax = 0$, а через L_2 — множество решений системы $Bx = 0$. Тогда

A если $m + s > n$, то существует ненулевой $x \in L_1 \cap L_2$

B если $m + s > n$, то $L_1 \cap L_2 = \{0\}$

C если $m + s < n$, то $L_1 + L_2 = \mathbf{R}^n$

D если $m + s < n$, то существует ненулевой $x \in L_1 \cap L_2$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Пусть A — вещественная кососимметрическая матрица, то есть для ее транспонированной выполняется равенство $A^{T} = -A$. Тогда

A если $A^2 = I$, то A — ортогональная матрица

B если $A^2 = -I$, то матрица A задает проектор

C если матрица A задает проектор, то $A = 0$

D если A ортогональная матрица, то у нее есть вещественное собственное число

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Пусть L_1 и L_2 — подпространства в $\mathbf{R}^n$. Тогда

A если $L_1 \cup L_2$ является подпространством, то $\dim(L_1 \cup L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$

B если $L_1 \cup L_2$ является подпространством, то $\dim L_1 + \dim L_2 \leqslant n$

C если $L_1 \cup L_2$ является подпространством, то $\dim(L_1 + L_2) > 0$

D если $L_1 + L_2 = \mathbf{R}^n$, то подпространства L_1 и L_2 образуют прямую сумму

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 6$, а I — единичная матрица того же порядка. Определим многочлен $p(\lambda)$ формулой $p(\lambda) = \det(I + \lambda A)$. Тогда

A многочлен $p(\lambda)$ имеет степень n

B если матрица A невырожденная, то многочлен $p(\lambda)$ имеет степень n^2

C многочлен $p(\lambda)$ имеет строго положительный корень

D если n нечетное, то многочлен $p(\lambda)$ имеет строго отрицательный корень

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Пусть A и B — вещественные симметричные матрицы порядка $n \geqslant 6$. Тогда

A если A и B положительно определенные матрицы, то матрица AB имеет только вещественные положительные собственные числа

B если A и B отрицательно определенные матрицы, то матрица AB имеет только вещественные отрицательные собственные числа

C если матрица AB имеет только вещественные положительные собственные числа, то матрицы A и B положительно определенные

D если матрица AB имеет только вещественные отрицательные собственные числа, то матрицы A и B отрицательно определенные

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Пусть A и B — вещественные квадратные матрицы порядка $n \geqslant 6$. Рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ стандартное скалярное произведение и предположим, что при любом вещественном α матрица $A + \alpha B$ задает оператор проектирования. Тогда

A если n четное, то $B \neq 0$

B если $B = 0$, то матрица A симметричная

C если матрица A задает оператор ортогонального проектирования, то $A \neq B$

D если матрица A не задает оператор проектирования, то $AB \neq BA$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Пусть A и B — вещественные матрицы, размеры которых равны, соответственно, $m \times n$ и $n \times m$. Тогда

A если ранги матриц AB и A совпадают, то $m = n$ и матрица B невырожденная

B если система $(AB)y = a$ имеет решение при любом $a \in \mathbf{R}^m$, то ранг матрицы A равен m

C если матрица AB невырожденная, то и матрица BA невырожденная

D если система $(BA)x = b$ имеет не более одного решения при каждом $b \in \mathbf{R}^n$, то ранг матрицы B равен m

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Определим функцию двух векторных аргументов $f(x, y)$, $x \in \mathbf{R}^n$ и $y \in \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, положив $f(x, y) = x^T A y$, где A — вещественная квадратная матрица порядка n. Тогда

A если матрица A симметричная, то $f(x, y)$ задает скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$

B если функция $f(x, y)$ задает скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$, то матрица A симметричная

C если матрица A невырожденная, то $f(x, y)$ задает скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$

D если $x^T A x > 0$ при любом ненулевом $x \in \mathbf{R}^n$, то $f(x, y)$ задает скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть A — замкнутое подмножество $\mathbf{R}$, $a \in A$, $b \notin A$, $a < b$. Тогда

A найдется точка границы множества A, принадлежащая (a, b)

B найдется точка границы множества A, принадлежащая $[a, b)$

C найдется точка границы множества A, принадлежащая $(a, b]$

D не существует точки границы множества A, принадлежащей $[a, b]$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Пусть M — компактное подмножество $\mathbf{R}$. Тогда

A если M не имеет предельных точек, то M имеет мощность континуума

B если M не имеет предельных точек, то M счетное

C если M не имеет предельных точек, то M конечное

D если M не имеет предельных точек, то M пустое

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Значение максимального решения задачи Коши $y' = -y^2$, $y(1) = 1$, в точке $x = -1$ равно

A 1

B 0

C -1

D e

E не определено

12. Решение задачи Коши $y' = \dfrac{y}{1+x^2}$, $y(0) = y_0$, имеет предел $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 1$. Тогда y_0 равно

A 0

B 1

C $e^{\pi/2}$

D $e^{-\pi/2}$

E не существует

13. Множество значений последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет ровно одну предельную точку. Тогда

A последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

B последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходится

C последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченная

D последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограниченная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Наибольшее значение функции $f(x, y) = xy$ на множестве $M = \{(x, y)\colon -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}, y = \sqrt{2 - x^2}\}$ достигается в точке (точках)

A $(1, 1), (-1, -1)$

B $(1, 1)$

C $(-1, -1)$

D $(-1, 1), (1, -1)$

E не достигается ни в одной точке

15. Функция $f(x)$ определена на интервале (a, b). Тогда

A если $f(x)$ непрерывна на (a, b), то $f(x)$ ограничена на (a, b)

B если $f(x)$ дифференцируема на (a, b), то $f(x)$ ограничена на (a, b)

C если $f(x)$ непрерывна на (a, b), то $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b)

D если $f(x)$ дифференцируема на (a, b), то $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b)

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Кривая на плоскости (x, y) задана уравнением $6x^2 - 7xy - 2y^3 + 3 = 0$. Уравнение касательной к этой кривой, проведенной через точку $(1, 1)$, есть

A $8x - 13y + 5 = 0$

B $12x - 5y - 7 = 0$

C $5x - 13y + 8 = 0$

D $9x - 11y + 2 = 0$

E другое уравнение, не совпадающее ни с одном из перечисленных в A, B, C, D

17. Функция $f(x)$ задана и непрерывна в каждой точке числовой прямой, и $f(x) = \dfrac{x - \sin x}{2x^3}$ для $x \neq 0$. Тогда

A $f(0) = 0$

B $f(0) = 1/2$

C $f(0) = 1/6$

D $f(0) = 1/12$

E функция с указанными свойствами не существует

18. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ задана равенствами $x_1 = 1$, $x_2 = 6$, $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n-1}$, $n \geqslant 2$. Тогда

A $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$

B $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$

C $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5$

D $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ равен другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует

19. Дана функция двух переменных $f(x, y) = x^2 - 6xy + 2y^2 + 6x + 10y + 5$. Тогда

A функция $f(x, y)$ на плоскости (x, y) имеет наибольшее значение и не имеет наименьшего значения

B функция $f(x, y)$ на плоскости (x, y) имеет наименьшее значение и не имеет наибольшего значения

C точка $(3, 2)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на плоскости (x, y)

D точка $(2, 4)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на плоскости (x, y)

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Дана функция двух переменных $f(x, y) = e^{x^2+y}$ и множество $M = \{(x, y) \colon x + y \leqslant 2\}$. Тогда

A функция $f(x, y)$ на множестве M ограничена сверху и не ограничена снизу

B функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наименьшего значения

C точка $(1/2, 3/2)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M

D точка $(0, 0)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Радиус сферы уменьшается со скоростью, пропорциональной площади поверхности сферы. В начальный момент времени $(t = 0)$ радиус сферы равен 4, через две секунды радиус уменьшился в 2 раза. В какой момент времени радиус уменьшится в 4 раза?

A 4 сек.

B 6 сек.

C 8 сек.

D в другой момент времени, отличный от перечисленных в A, B, C

E такого момента времени не существует

22. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ задана равенствами $x_1 = a$, $x_{n+1} = e^{-x_n} + 2$, $n \geqslant 1$. Тогда

A при любом a последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ монотонно возрастает

B существует такое a, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ не ограничена сверху

C для любого $a \in [1, 2]$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ имеет предел

D для любого $a \in [4, 6]$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ имеет предел, и $\lim\limits_{t\to\infty} x_n < 2$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Выберите ***ложное*** утверждение.

A пересечение счетного множества выпуклых подмножеств $\mathbf{R}^n$ является выпуклым множеством

B замыкание выпуклого подмножества $\mathbf{R}^n$ является выпуклым множеством

C внутренность выпуклого подмножества $\mathbf{R}^n$ является выпуклым множеством

D выпуклая функция, определенная на выпуклом замкнутом множестве $M \subset \mathbf{R}^n$, непрерывна на M

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

24. Дана функциональная последовательность $\{f_n(x) = x\sqrt{n}e^{-\sqrt{nx}}, n = 1, 2, \ldots\}$. Обозначим через M множество таких $x \in \mathbf{R}$, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, и пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ на M. Тогда

A множество M открыто

B функция $f(x)$ имеет разрыв на M

C существует такой интервал $(a, b) \subset M$, что последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ не сходится равномерно на (a, b)

D для любого отрезка $[a, b] \subset M$ последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на $[a, b]$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x} \right)^n .$$

Пусть M — множество точек на числовой прямой $\mathbf{R}$, в которых ряд сходится. Для $x \in M$ обозначим через $S(x)$ сумму этого ряда. Тогда

A множество M открыто

B $S(x) \geqslant 0$ при любом $x \in M$

C на интервале $(1/4, 1/3)$ ряд сходится к функции $S(x)$ равномерно

D функция $S(x)$ непрерывна на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

26. Неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 + x}$$

равен

A $\dfrac{6}{2x^3 + 3x^2} + C$

B $\ln \left| \dfrac{x}{x+1} \right| + C$

C $\ln |x^2 + x| + C$

D $\ln \left| \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 \right| + C$

E $\ln \left| 1 + \dfrac{1}{x} \right| + C$

27. Неопределенный интеграл

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + 1}$$

равен

A $\dfrac{1}{2}x^2 \ln |x^2 + 1| + C$

B $\dfrac{1}{x^2/2 + \ln |x|} + C$

C $\ln |\operatorname{arctg} x| + C$

D $\operatorname{arctg} x + C$

E $\dfrac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$

28. Определенный интеграл

$$\int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{2-x^2}}$$

равен

A $\quad -\pi/4$

B $\quad \pi/4$

C $\quad -1/\sqrt{2}$

D $\quad 1/\sqrt{2}$

E $\quad \pi/2$

29. Определенный интеграл

$$\int_1^2 \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)dx$$

равен

A $\quad \operatorname{tg}(7/2)-\operatorname{tg}2$

B $\quad \operatorname{tg}(5/2)-\operatorname{tg}2$

C $\quad 1/2$

D $\quad (\operatorname{tg}(7/2))^2-(\operatorname{tg}2)^2$

E $\quad (\operatorname{tg}(5/2))^2-(\operatorname{tg}2)^2$

30. Площадь фигуры, заключенной между кривыми $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$, равна

A $\quad 1/6$

B $\quad 1/3$

C $\quad 1/2$

D $\quad 2/3$

E $\quad 1$

31. Предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x}}{\sin\sqrt[3]{x}}$ равен

A $\quad -2/3$

B $\quad 2/3$

C $\quad 3/2$

D $\quad 2$

E $\quad$ не существует

32. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)^{(1-x)/x^2}$ равен

A $\quad 2\ln\dfrac{1}{2}$

B $\quad e^{-1/2}$

C $\quad e^{1/2}$

D $\quad e^{-2}$

E $\quad e^{2}$

33. При каком наибольшем значении целого положительного числа k максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $\dfrac{dx}{dt} = x^k$, $x(0) = 1$ определено в точке $t = \pi/12$?

A 1

B 2

C 3

D 4

E другом

34. Пусть функция $f(x)$ определена, ограничена и непрерывна вместе со своей производной на $\mathbf{R}$, и пусть

$$g(x) = \begin{cases} [f^2(x)]^{f^2(x)}, & \text{если } f(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } f(x) = 0. \end{cases}$$

Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны:

I. Функция $g(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$.

II. Функция $g(x)$ ограничена на $\mathbf{R}$.

III. Функция $g(x)$ дифференцируема $\mathbf{R}$.

A только I

B только II

C только I и II

D только I и III

E ни одно из I, II и III

35. Сумма ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

равна

A 2

B 4

C 6

D 1

E другому числу

36. Значение максимального (непродолжаемого) решения задачи Коши $\dfrac{dy}{dx} = y\sin x$, $y(\pi/2) = -\pi^3/48$ в точке $x = -\pi/2$

A равно $-\pi^3/16$

B равно $-\pi^3/48e$

C равно $-\pi^3/48$

D равно другому числу

E не существует

37. Неявная функция $y(x)$ определяется уравнением $4x^2y - \sin xy + 3y^2 = 12$. Производная $\dfrac{dy}{dx}$ в точке $(0, 2)$

A равна $1/6$

B равна $-1/6$

C равна $-1/12$

D равна $1/12$

E равна другому числу или не существует.

38. Множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg}^{2n} x$ есть

A $\{\pi k, k \in \mathbf{Z}\}$

B открытое множество, отличное от $\mathbf{R}$

C замкнутое множество, отличное от $\{\pi k, k \in \mathbf{Z}\}$ и от $\mathbf{R}$

D $\mathbf{R}$

E Ни одно из A, B, C, D.

39. Неявная функция $y(x)$ определяется уравнением $3x^5y^2 - 4xy^3 + 2x^2y^3 + 3x^4y^3 = 2$. Производная $\dfrac{dy}{dx}$ в точке $(1, -1)$ равна

A $\quad 0$

B $\quad -3$

C $\quad -1$

D $\quad 1$

E $\quad$ другому числу

40. Сумма ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

равна

A $\quad \ln\frac{3}{2} - 1$

B $\quad \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} - 1$

C $\quad \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}$

D $\quad \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}$

E $\quad$ другому числу

7.1.2 Вторая часть теста

1. Пусть положительные числа a_n, $n = 1, 2, \ldots$, таковы, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1$. Функции $f_n(x)$ заданы формулами

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{nx^n}, & \text{если } x \leqslant -1, \\ a_n \cdot \left(3x^2/2 + x\right), & \text{если } -1 < x < 0, \\ \dfrac{x^n}{(n-1)!}, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда

а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится для любой точки $x \in \mathbf{R}$;

Да $\qquad$ Нет

б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на своей области сходимости;

Да $\qquad$ Нет

в) существует последовательность $\{a_n\}$ такая, что $f_n(x)$ непрерывна для любого n;

Да Нет

г) существует последовательность $\{a_n\}$ такая, что каждая $f_n(x)$ имеет ровно одну точку разрыва;

Да Нет

д) функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывна на своей области определения;

Да Нет

е) функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ положительна на своей области определения;

Да Нет

ж) для любой последовательности $\{a_n\}$ функции $f_n(x)$ дифференцируемы во всех точках, в которых непрерывны;

Да Нет

з) последовательность $g_N(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)\right)^2}$ сходится к $g(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)^2}$ равномерно на своей области сходимости.

Да Нет

2. В пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, введено стандартное скалярное произведение, при котором матрица A порядка n задает ортогональный проектор. Столбцы $u \in \mathbf{R}^n$ и $v \in \mathbf{R}^n$ выбраны так, что матрица $A + uu^T$ является невырожденной, а матрица $A + vv^T$ — вырожденной (индекс T обозначает транспонирование). Тогда

а) матрица $A + uu^T$ положительно определенная;

Да Нет

б) матрица $A + vu^T$ вырожденная;

Да Нет

в) матрица $A + 2vv^T$ положительно определенная;

Да Нет

г) ранг матрицы A не меньше, чем $n - 1$;

Да Нет

д) ранг матрицы A не больше, чем $n-2$;

Да Нет

е) матрица $A + Auu^{\mathsf{T}}A$ положительно определенная;

Да Нет

ж) у матрицы $A - uu^{\mathsf{T}}$ есть строго отрицательное собственное число;

Да Нет

з) число 1 является собственным числом матрицы $A - uu^{\mathsf{T}}$.

Да Нет

3. Дана функция $f(x, y) = 2x^2 - 7y^2$ и множество $M = \{(x, y) \colon 4x^4 + y^4 = 4x^2 - 2y^2\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в четырех точках;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в трех точках;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в четырех точках;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в трех точках;

Да Нет

д) наибольшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M равно 2;

Да Нет

е) наименьшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M равно 0;

Да Нет

ж) существует точка, принадлежащая M и являющаяся точкой локального минимума функции $f(x, y)$, в которой не достигается наименьшее значение функции $f(x, y)$ на M;

Да Нет

з) существует точка, принадлежащая M и являющаяся точкой локального максимума функции $f(x, y)$, в которой не достигается наибольшее значение функции $f(x, y)$ на M.

Да Нет

4. Дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{n^{\alpha}},$$

где α — некоторый параметр. Пусть M — множество его сходимости. Для $x \in M$ обозначим через $S(x)$ сумму этого ряда. Тогда

а) при любом $\alpha \in (0,1)$ множество M непусто и замкнуто;

Да Нет

б) при любом $\alpha \in (0,1)$ множество M не ограничено;

Да Нет

в) при $\alpha = 1$ функция $S(x)$ непрерывна на множестве M;

Да Нет

г) при любом $\alpha \in [1,+\infty)$ функция $S(x)$ ограничена на любом ограниченном подмножестве множества M;

Да Нет

д) при $\alpha = 2$ существует такая точка $x_0 \in M$, что $S(x_0) = 2$;

Да Нет

е) при любом $\alpha \in [0,+\infty)$ ряд сходится к функции $S(x)$ равномерно на любом компактном подмножестве множества M;

Да Нет

ж) при $\alpha = 1$ ряд сходится равномерно на интервале $(0,1)$;

Да Нет

з) существует $\alpha > 0$, такое что график функции $S(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

5. Пусть для всех $x \in \mathbf{R}$ функция $f(x)$ задана формулой

$$f(x) = \int_{2+x}^{1+e^x} \frac{t}{1+t^4}\,dt.$$

Тогда

а) функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$;

Да Нет

б) функция $f(x)$ дифференцируема на $\mathbf{R}$;

Да Нет

в) $f(x) \geqslant 0$ для всех x, в которых она определена;

Да Нет

г) $f'(x) \neq 0$ для всех x, в которых $f(x)$ дифференцируема;

Да Нет

д) $f(0) = 0$;

Да Нет

е) $f'(0) = 1$;

Да Нет

ж) предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$;

Да Нет

з) предел $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$.

Да Нет

7.2 Ответы и решения теста

7.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. D. **2.** C. **3.** E. **4.** E. **5.** A. **6.** D. **7.** B. **8.** B. **9.** B. **10.** C. **11.** E. **12.** D. **13.** E. **14.** B. **15.** E. **16.** C. **17.** D. **18.** C. **19.** E. **20.** E. **21.** B. **22.** C. **23.** D. **24.** D. **25.** D. **26.** B. **27.** E. **28.** E. **29.** B. **30.** B. **31.** D. **32.** C. **33.** D. **34.** B. **35.** C. **36.** C. **37.** A. **38.** B. **39.** D. **40.** D.

7.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Легко видеть, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится для всех $x \in (-1, 0)$, и его сумма равна $3x^2/2 + x$. Для $x \geqslant 1$ ряд сходится (но не равномерно, поскольку функции $f_n(x)$ неограничены) к xe^x, а для $x \leqslant -1$ ряд сходится к $-\ln(1 - 1/x)$. Ответ на вопрос а) да, на вопрос б) нет. Кроме того, видно, что предел функции $f(x)$ справа в точке $x = -1$ равен $1/2$, а значение в этой точке равно $-\ln 2$. Ответы на вопросы д) и е) нет.

Далее видно, что независимо от a_n, все функции $f_n(x)$ непрерывны в точке $x = 0$ (и равны нулю). Так что если выбрать a_n, позаботившись лишь о том, чтобы $\dfrac{a_n}{2} \neq \dfrac{(-1)^n}{n}$, то все функции $f_n(x)$ будут иметь разрыв в единственной точке $x = -1$. Вообще не иметь разрыва все функции $f_n(x)$ не могут. Например, для нечетных n значение в точке $x = -1$ отрицательно, а предел справа положителен. Ответ на вопрос в) нет, на вопрос г) да. Далее, правая производная функции $f_n(x)$ в точке $x = 0$ равна нулю для всех $n > 1$, а левая производная в той же точке равна a_n, что не обязательно то же самое. Ответ на вопрос ж) нет.

Исследуем равномерную сходимость последовательности $g_N(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)\right)^2}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на всем $\mathbf{R}$, то и $g_N(x)$ сходится к $g(x)$ на всем $\mathbf{R}$. Рассмотрим сходимость этой последовательности отдельно на трех множествах: $(-1, 0)$, $(-\infty, -1]$, $[0, +\infty)$.

Нетрудно видеть, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на интервале $(-1, 0)$ равномерно (это следует из ограниченности функции $3x^2/2 + x$). Так как функция $\dfrac{1}{1 + x^2}$ равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$, то последовательность $g_N(x)$ суперпозиций этой функции с частичными суммами ряда тоже сходится равномерно.

На множестве $(-\infty, -1]$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ является рядом Лейбница. Так как $f_n(x)$ равномерно стремится к нулю на $(-\infty, -1]$, то и сам ряд сходится равномерно. Равномерная сходимость последовательности $g_N(x)$ следует из равномерной непрерывности функции $\dfrac{1}{1 + x^2}$.

При $x \in (0, +\infty)$ все функции $f_n(x)$ неотрицательные и монотонно возрастающие. Следовательно, все частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$ тоже неотрицательные и монотонно возрастающие. А значит функции $g_N(x)$ все монотонно убывающие. Кроме того, $g_N(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, и сходимость $g_N(x)$ к $g(x)$ монотонная при всех $x \in \mathbf{R}$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $g_N(x)$ убывают по N и стремятся к нулю при $x \to +\infty$, то найдется такое $M > 0$, что при всех N и при всех $x > M$ выполнено неравенство $0 < g(x) < g_N(x) < \varepsilon$.

На отрезке $[0, M]$ последовательность непрерывных функций $g_N(x)$ монотонно сходится к непрерывной функции $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2 e^{2x}}$. Следовательно, сходимость равномерная, и найдется такое $N_0 \in \mathbf{N}$, что для всех $N > N_0$ и $x \in [0, M]$ выполняется неравенство $|g_N(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Таким образом, получили, что при всех $N > N_0$ и $x \in [0, +\infty)$ справедливо неравенство $|g_N(x) - g(x)| < \varepsilon$. Это и значит, что последовательность $g_N(x)$ равномерно сходится к $g(x)$ на $[0, +\infty)$.

Следовательно, $g_N(x)$ сходится к $g(x)$ равномерно на объединении всех трех множеств, т. е. на $\mathbf{R}$. Ответ на вопрос з) да.

Задача 2. Как ортогональный проектор матрица A симетричная и положительно полуопределенная, т. е. $z^T A z \geqslant 0$ при всех $z \in \mathbf{R}^n$. Тогда $z^T(A + uu^T)z = z^T A z + (u^T z)^2 \geqslant 0$ при всех $z \in \mathbf{R}^n$, так что матрица $A + uu^T$ тоже положительно полуопределенная. Так как эта матрица невырожденная по условию задачи, то она и положительно определена. По аналогичным причинам матрица $A + vv^T$ тоже полуопределенная, но так как она вырожденная, то существует $z \in \mathbf{R}^n$, $z \neq 0$, при котором $z^T A + (z^T v)v^T = 0$. Тогда $z^T A z + (z^T v)^2 = 0$, и так как $z^T A z \geqslant 0$, то $z^T A z = 0$ и $z^T v = 0$. Первое равенство для полуопределенной симметричной матрицы A означает, что $z^T A = 0$. Поэтому $z^T(A + vu^T) = 0$, $z^T(A + 2vv^T) = 0$ и $z^T(A + Auu^TA) = 0$. Таким образом, ответы на пункты а) и б) да, на пункты в) и е) нет. Кроме того, матрица A вырожденная. В то же время ввиду невырожденности матрицы $A + uu^T$ система $z^T A = 0$, $z^T u = 0$ имеет только нулевое решение, т. е. расширенная матрица $[A, u]$ имеет ранг n. Поэтому матрица A имеет ранг ровно $n - 1$. Ответы на пункт г) да, на пункт д) нет.

Воспользовавшись вырожденностью матрицы A, выберем $z \in \mathbf{R}^n$, $z \neq 0$, $z^T A = 0$. При этом, как было отмечено выше, $z^T u \neq 0$, так что $z^T(A - uu^T)z = -(z^T u)^2 < 0$. То есть симметричная матрица $A - uu^T$ не является положительно полуопределенной, и у нее должно быть строго отрицательное собственное число. Ответ на пункт ж) да. Если $n = 2$ и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то все условия задачи выполнены, но матрица $A - uu^T$ не имеет 1 в качестве собственного числа. Этот контрпример показывает, что ответ на пункт з) нет.

Задача 3. Так как множество M компактное, а целевая функция непрерывна, то ее наибольшее и наименьшее значения на M достигаются, а соответствующие точки находятся либо среди стационарных точек, либо среди нерегулярных точек.

Нерегулярная точка (в которой производные функции, задающей множество M, равны нулю) в данной задаче одна: $x = 0$, $y = 0$.

Функция Лагранжа для этой задачи следующая:

$$L = 2x^2 - 7y^2 + \lambda(4x^4 + y^4 - 4x^2 + 2y^2).$$

Дифференцируя по x и y, получим систему уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x + \lambda(16x^3 - 8x) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = -14y + \lambda(4y^3 + 4y) = 0.$$

Добавив к этой системе уравнение

$$4x^4 + y^4 = 4x^2 = 2y^2 \tag{1}$$

и решив полученную систему из трех уравнений, получим 7 стационарных точек:

$$\begin{array}{llll}
x = 0, & y = 0, & \lambda \text{ не определено}, & f(0,0) = 0, \\
x = -1, & y = 0, & \lambda = -\dfrac{1}{2}, & f(-1,0) = 2, \\
x = 1, & y = 0, & \lambda = -\dfrac{1}{2}, & f(1,0) = 2, \\
x = -\sqrt{\dfrac{2}{5}}, & y = -\sqrt{\dfrac{2}{5}}, & \lambda = \dfrac{5}{2}, & f\left(-\sqrt{\dfrac{2}{5}}, -\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right) = -2, \\
x = -\sqrt{\dfrac{2}{5}}, & y = \sqrt{\dfrac{2}{5}}, & \lambda = \dfrac{5}{2}, & f\left(-\sqrt{\dfrac{2}{5}}, \sqrt{\dfrac{2}{5}}\right) = -2,
\end{array}$$

$$x = \sqrt{\frac{2}{5}}, \qquad y = -\sqrt{\frac{2}{5}}, \qquad \lambda = \frac{5}{2}, \qquad f\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = -2,$$
$$x = \sqrt{\frac{2}{5}}, \qquad y = \sqrt{\frac{2}{5}}, \qquad \lambda = \frac{5}{2}, \qquad f\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right) = -2.$$

(Заметим, что нерегулярная точка оказалась среди стационарных.)

Сравнивая значения функции $f(x, y)$ в стационарных точках, нетрудно заметить, что наибольшее значение функции на M равно 2 (достигается в двух точках), наименьшее значение функции на M равно -2 (достигается в четырех точках). Таким образом, ответы на вопросы а), б), г), е) нет, на вопрос в), д) да.

Единственная стационарная точка, в которой не достигается наибольшее или наименьшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M, это точка $x = 0$, $y = 0$. Исследуем поведение функции в окрестности этой точки.

Выразив y^2 из соотношения (1), получим: $y^2 = 2x^2 - 2x^4 - y^4/2$ на множестве M. Подставив это выражение в $f(x, y)$, получим:

$$f(x, y) = 2x^2 - 7y^2 = 2x^2 - 7(2x^2 - 2x^4 - y^4/2) = -12x^2 + 14x^4 + 7/2y^4.$$

Заметим, что так как $4x^4 + y^4 \geqslant 0$, то при всех $(x, y) \in M$ выполняется неравенство $y^2 \leqslant 2x^2$ (и $y^4 \leqslant 4x^4$). Следовательно, при всех $(x, y) \in M$

$$f(x, y) = -12x^2 + 14x^4 + 7/2y^4 \leqslant -12x^2 + 28x^4.$$

Осталось заметить, что при $x \neq 0$, достаточно малых по абсолютной величине, величина в правой части неравенства отрицательная. Значит, точка $(0, 0)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M. Ответ на вопрос ж) нет, на вопрос з) да.

Задача 4. Заметим, во-первых, что если $x \in M$, то $x \geqslant 0$, а, во-вторых, что указанный ряд при $x = 1$ сходится для любого α. Из формулы Тейлора легко следует, что

$$\frac{\sqrt[n]{x} - 1}{n^{\alpha}} = \frac{\ln x}{n^{\alpha+1}} + \frac{g(n, x)}{n^{\alpha+1}}, \tag{2}$$

где функции $g(n, x)$ обладают следующим свойством:

для любого отрезка $[a, b] \subset (0, +\infty)$ существует последовательность $\{c_n, n = 1, 2, \ldots\}$, такая что $|g(n, x)| \leqslant c_n$ при любом $x \in [a, b]$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. (3)

Таким образом, применяя интегральный признак Коши, получаем, что если $\alpha > 0$, то ряд сходится в любой точке $x > 0$; если $\alpha \leqslant 0$, то ряд расходится в любой точке $x > 0$, $x \neq 1$. В точке $x = 0$ ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Окончательно получаем:

$M = \{1\}$ при $\alpha \leqslant 0$,

$M = (0, +\infty)$ при $0 < \alpha \leqslant 1$,

$M = [0, +\infty)$ при $1 < \alpha$.

Таким образом, на вопрос а) ответ нет, на вопрос б) — да.

Если $\alpha > 0$, то из (2), (3) и признака Вейерштрасса следует, что на любом отрезке $[a, b] \subset (0, +\infty)$ ряд сходится равномерно. Следовательно, при $\alpha > 0$ функция $S(x)$ непрерывна на $(0, +\infty)$. Поэтому на вопросы в) и е) ответы да. (Напомним, что при $\alpha = 0$ множество M состоит из одной точки.)

При любом α каждое слагаемое ряда является возрастающей по x функцией, поэтому функция $S(x)$ также является возрастающей. При этом, если $x < 1$, то $S(x) < 0$, а при $x \to +\infty$ функция $S(x)$ стремится к $+\infty$. Поэтому на вопрос д) ответ да.

Покажем, что при $\alpha = 1$ функция $S(x)$ не ограничена на интервале $(0, 1)$. Действительно, так как функция $S(x)$ возрастает на интервале $(0, 1)$, то существует конечный или равный $-\infty$ предел $A = \lim\limits_{x \to 0+} S(x)$. Пусть $S^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[k]{x}-1}{k}$ — n-я частичная сумма ряда. Поскольку при $x < 1$ все слагаемые ряда отрицательны, то $S(x) < S^{(n)}(x)$ при каждом n. Переходя к пределу при $x \to 0+$, получаем $A < -\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, и из расходимости гармонического ряда следует, что $A = -\infty$. Значит, на вопрос г) ответ нет, а на вопрос з) — да.

Поскольку при $\alpha = 1$ функция $S(x)$ не ограничена на интервале $(0, 1)$, а каждая частичная сумма $S^{(n)}(x)$, очевидно, ограничена на этом интервале, то на $(0, 1)$ сходимость ряда не может быть равномерной. Ответ на вопрос ж) нет.

Задача 5. Неопределенный интеграл
$$\int \frac{t}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t^2) + C.$$
Соответственно,
$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left((1+e^x)^2\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left((2+x)^2\right).$$
Эта функция определена на $\mathbf{R}$, непрерывна на $\mathbf{R}$, поскольку является композицией непрерывных на $\mathbf{R}$ функций, и дифференцируема на $\mathbf{R}$, поскольку является композицией дифференцируемых на $\mathbf{R}$ функций.

Заметим, что $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg}\left((1+e^x)^2\right) = \pi/4$, а $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg}\left((2+x)^2\right) = \pi/2$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\pi/8 < 0$. Поэтому найдется $x \in \mathbf{R}$, в котором $f(x) < 0$.

Кроме того, прямой подстановкой можно убедиться в том, что $f(0) = 0$.

Производная функции $f(x)$ равна
$$f'(x) = \frac{(1+e^x)e^x}{1+(1+e^x)^4} - \frac{(2+x)}{1+(2+x)^4}.$$
Соответственно,
$$f'(0) = \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0 \neq 1.$$

Далее,
$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\frac{1}{e^{3x}} + \frac{1}{e^{2x}}}{\frac{1}{e^{4x}} + \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^4} - \frac{\frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^4} + \left(1 + \frac{2}{x}\right)^4} \right) = 0$$
и
$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{(1+e^x)e^x}{1+(1+e^x)^4} - \frac{\frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^4} + \left(1 + \frac{2}{x}\right)^4} \right) = 0.$$

Таким образом, ответы на вопросы: а) — да, б) — да, в) — нет, г) — нет, д) — да, е) — нет, ж) — да, з) — да.

8 Вступительный экзамен 2007 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

8.1 Тест

8.1.1 Первая часть теста

1. Пусть M — не более, чем счетное подмножество вещественной прямой $\mathbf{R}$, и точка $x \in M$. Тогда

A если x граничная точка множества M, то x предельная точка множества M

B если x граничная точка множества M, то x изолированная точка множества M

C если x изолированная точка множества M, то x предельная точка множества M

D если x предельная точка множества M, то x граничная точка множества M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Пусть M — непустое подмножество вещественной прямой $\mathbf{R}$. Тогда

A множество граничных точек M пустое

B множество граничных точек M непустое

C множество граничных точек M открытое

D множество граничных точек M замкнутое

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Пусть M — множество значений непрерывной функции, отображающей $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$. Тогда

A множество M ограниченное

B множество M неограниченное

C множество M открытое

D множество M замкнутое

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Максимальное решение задачи Коши $y' = -\dfrac{y^2}{x}$, где $y(e) = 1$, определено на множестве

A $(0, +\infty)$

B $(1, +\infty)$

C $(0, e^2)$

D $(-\infty, e^2)$

E $(-\infty, +\infty)$

5. Значение максимального решения задачи Коши $y' = x + y$, где $y(-1) = 0$, в точке $x = 1$ равно

A 0

B -1

C -2

D $-e$

E не определено

6. Даны функция $f(x, y) = (x - y)^2$ и множество $M = \{(x, y) \colon x^2 - y^2 = 1\}$. Тогда

A наибольшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M достигается в единственной точке

B наибольшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M достигается более, чем в одной точке

C наименьшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M достигается в единственной точке

D наименьшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M достигается более, чем в одной точке

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Даны функция $f(x, y) = 2x + y$ и множество $M = \{(x, y) \colon |y| \leqslant 1, |x + y| \leqslant 1\}$. Тогда

A функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в точке $(0, 1)$

B функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в точке $(1, 0)$

C функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в точке $(2, -1)$

D функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в точке $(3, -2)$

E наибольшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M не существует

8. Задана матрица A с размерами $m \times n$. Тогда

A если строки матрицы A линейно независимые, то $m > n$

B если строки матрицы A линейно зависимые, то $m > n$

C если $m > n$, то строки матрицы A линейно независимые

D если $m > n$, то строки матрицы A линейно зависимые

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть L_1 и L_2 — подпространства пространства $\mathbf{R}^n$ с размерностями n_1 и n_2, соответственно. Тогда

A если $\mathbf{R}^n = L_1 + L_2$, то $n_1 + n_2 = n$

B если $\mathbf{R}^n = L_1 + L_2$, то размерность пересечения $L_1 \cap L_2$ больше нуля

C если $\mathbf{R}^n = L_1 + L_2$, то $n_1 + n_2 \leqslant 2n$

D	если $n_1 + n_2 = n$, то $L_1 \cap L_2 = \{0\}$

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Заданы две матрицы A и B одинаковых размеров $m \times n$, причем у матрицы A линейно независимые строки. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. Существует такая матрица C, что $AC = B$.

II. Если у матрицы B линейно независимые столбцы, то матрица $B^{T}A$ невырожденная (здесь B^{T} — транспонированная к B).

III. Если у матрицы B линейно независимые столбцы, то матрица AB^{T} невырожденная.

A	I, II и III

B	только I и II

C	только I и III

D	только II и III

E	только I

11. Пусть A и B — две вещественные квадратные матрицы порядка $n \geqslant 6$. Через $\varphi(\lambda)$ обозначим определитель матрицы $A + \lambda B$. Тогда

A	если n нечетное, то график функции $\varphi(\lambda)$ имеет точку перегиба

B	график функции $\varphi(\lambda)$ не имеет горизонтальной асимптоты

C	существуют матрицы A и B, при которых график функции $\varphi(\lambda)$ имеет наклонную (не вертикальную и не горизонтальную) асимптоту

D	при четном n функция $\varphi(\lambda)$ имеет точку локального минимума

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Будем трактовать вещественные квадратные матрицы порядка n как линейные операторы из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, а через $\operatorname{Ker} X$ и $\operatorname{Im} X$ будем обозначать, соответственно, ядро и образ матрицы X. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 6$. Тогда

A	если существует вектор $x \in (\operatorname{Ker} A) \cap (\operatorname{Im} A)$, то матрица A вырожденная

B	существует матрица A, при которой $\operatorname{Im}(A^2 - A) = \varnothing$

C	если сумма размерностей $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$ равна семи, то у матрицы A имеется вещественное собственное число

D	$\operatorname{Ker}(A^2) = \operatorname{Ker} A$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 6$, трактуемая как линейный оператор из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. Если у матрицы A имеются инвариантные подпространства L_1 и L_2, пересечение которых одномерно, то у матрицы A есть вещественное собственное число.

II. Число различных инвариантных подпространств у матрицы A не превосходит $n!$.

III. При $n = 7$ у матрицы A имеется 6-мерное инвариантное подпространство.

A I, I и III

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E только I

14. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 6$, I — единичная матрица порядка n и $B = I - 2A$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. Если A задает оператор проектирования, то B ортогональная матрица.

II. Если A задает оператор проектирования, то B невырожденная матрица.

III. Если A задает ортогональный проектор, то B ортогональная матрица.

A I, I и III

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E только I

15. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 6$, имеющая n различных строго положительных собственных чисел. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. Симметризация $\frac{1}{2}(A + A^T)$ матрицы A является положительно определенной матрицей.

II. Не существует матрицы A, для которой симметризация $\frac{1}{2}(A + A^T)$ является отрицательно определенной матрицей.

III. Существуют две линейно независимые системы векторов $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{y_1, \ldots, y_n\}$ в $\mathbf{R}^n$, при которых $y_j^T A x_i = 0$ при $i \neq j$ и $y_i^T A x_i = 1$ при всех i.

A I, I и III

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E только III

16. Кривая на плоскости задана уравнением $x^2 + 2xy + 3x + y^3 = 15$. Через точку $(2, 1)$ проведена касательная к этой кривой. Отрезок касательной, заключенный между осями координат, и отрезки на осях координат, отсекаемые касательной, образуют треугольник, площадь которого равна

A 625/126

B 576/119

C 476/129

D 825/226

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

17. Функция $f(x)$ задана на множестве $M \subset \mathbf{R}$, непрерывна на M и дифференцируема в каждой точке $\operatorname{int} M$, где $\operatorname{int} M$ — множество внутренних точек множества M. Тогда

A если множество M не ограничено и производная $f'(x)$ не ограничена на $\operatorname{int} M$, то функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на множестве M

B если множество M ограничено и производная $f'(x)$ не ограничена на $\operatorname{int} M$, то функция $f(x)$ не ограничена на множестве M

C если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на M, то производная $f'(x)$ ограничена на $\operatorname{int} M$

D если множество M не ограничено и функция $f(x)$ не ограничена на M, то производная $f'(x)$ не ограничена на $\operatorname{int} M$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

18. Пусть M — множество двумерной плоскости xOy, где сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2(|x| + |y|)^{2n}$. Тогда

A множество M неограниченное

B	множество M замкнутое

C	внутренность множества M совпадает с внутренностью некоторого квадрата

D	граница множества M — пустое множество

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Множество $M \subset \mathbf{R}^2$ имеет граничные точки, не принадлежащие M. Какие из следующих утверждений (I, II, III, IV) истинные?

I. Множество M открыто.

II. Множество изолированных точек множества M не пусто.

III. Множество M бесконечно.

IV. Существует предельная точка множества M, не принадлежащая M

A	только I и III

B	только II и III

C	только III и IV

D	только I, III, IV

E	I, II, III, IV

20. Пусть $f_n(x) = n\left((x^2+x+1)^{1/n}-1\right)$ и пусть M — множество тех x, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Для $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. Множество M совпадает с множеством всех вещественных чисел.

II. $f(x) \geqslant 0$ при любом $x \in M$.

III. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 1$ и $f'(1) = 1$.

A	только I

B	только I и II

C	только I и III

D	только II и III

E	только III

21. Пусть для $x \neq 1$

$$f_n(x) = n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(x+1)/(x-1)} - 1\right)$$

и пусть M — множество тех x, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Для $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда

A $M = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

B график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту

C функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 2$ и $f'(2) = -4$

D функция $f(x)$ на множестве M имеет не менее двух локальных минимумов

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Каждая точка множества $M \subset \mathbf{R}$ является изолированной. Тогда

A множество M замкнуто

B множество M не ограничено

C множество M не имеет предельных точек

D множество M не более чем счетно

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$. Пусть M — множество его сходимости. Тогда

A $M = \{0\}$

B $M = (-1, 1)$

C $M = [0, +\infty)$

D $M = [-1, 1]$

E множество M не совпадает ни с одним из множеств в A, B, C, D

24. Функция $f(x)$ определена на $[0, +\infty)$, неотрицательная и строго убывает на всей области определения. Тогда

A ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$ сходится

B если существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$ сходится

C функция $f(x)$ положительная на всей области определения

D если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две монотонные функции, заданные на $\mathbf{R}$, причем $g(x) \neq 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$. Тогда

A функция $f(x) + g(x)$ монотонная

B функция $f(x)g(x)$ монотонная

C функция $f(x)/g(x)$ монотонная

D функция $(f(x))^2$ монотонная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

26. На $\mathbf{R}^2$ задана непрерывная функция $f(x)$. Тогда

A если $(f(x))^2$ дифференцируемая на $\mathbf{R}^2$, то $f(x)$ дифференцируемая на $\mathbf{R}^2$

B существует такая $f(x)$, что $f(x)$ дифференцируемая на $\mathbf{R}^2$, но $(f(x))^2$ не дифференцируемая на $\mathbf{R}^2$

C функция $\sqrt{|f(x)|}$ непрерывная на $\mathbf{R}^2$

D функция $\sqrt{|f(x)|}$ дифференцируемая на $\mathbf{R}^2$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

27. Пусть a и b — вещественные числа. Последовательность $1, a, b, a^2, ab, b^2, a^3, a^2b, ab^2, b^3, a^4, a^3b, \ldots$ сходится тогда и только тогда, когда

A $-1 < a < 1, -1 < b < 1$

B $-1 \leqslant a < 1, -1 \leqslant b < 1$

C $-1 \leqslant a \leqslant 1, -1 \leqslant b \leqslant 1$

D $-1 < a < 1, -1 < b < 1$ или $a = b = 1$

E $-1 < ab < 1$

28. Рассмотрим две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, и образуем третью последовательность $\{c_n\}$ чередованием: $c_{2n-1} = a_n$, $c_{2n} = b_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

A если обе последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то $\{c_n\}$ сходится

B если обе последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ монотонные, то $\{c_n\}$ монотонная

C если обе последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ монотонно убывают, то $\{c_n\}$ монотонно убывает

D	если $\{c_n\}$ сходится, то обе последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

29. Дан числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда

A	если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ тоже сходится

B	если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ тоже сходится

C	если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \ln n$ тоже сходится

D	если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд, полученный из него любой перестановкой его членов, тоже сходится

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Функция $f(x)$ определена на $\mathbf{R}$. При этом для всех вещественных x и y выполняется неравенство $|f(x) - f(y)| \leqslant (x - y)^2$. Выберите *ложное* утверждение:

A	функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$

B	функция $f(x)$ дифференцируема на $\mathbf{R}$

C	функция $f(x)$ постоянна на $\mathbf{R}$

D	существует строгий локальный максимум функции $f(x)$

E	среди утверждений A, B, C, D есть ложное

31. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ равен

A	$1/\sqrt[3]{e}$

B	$1/2$

C	$1/e$

D	$1/e^3$

E	другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

32. Предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt[3]{n^3+n^2}\right)$ равен

A	$1/6$

B	$1/3$

C 0

D 3

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

33. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+\sin x}{x^2}$ равен

A 0

B $-1/2$

C -1

D -2

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

34. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(e^{1-\cos(1/n)}-1\right)$ равен

A e

B $1/4$

C $1/2$

D 1

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

35. Интеграл $\displaystyle\int_1^e x^2\ln x\,dx$ равен

A $\dfrac{2}{9}e^3$

B $\dfrac{1}{3}e^3$

C $\dfrac{2}{9}e^3+\dfrac{1}{9}$

D $\dfrac{1}{3}e^3+\dfrac{1}{9}$

E $\dfrac{1}{3}e^3+\dfrac{2}{9}$

36. Интеграл $\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ равен

A $\ln(1+\sqrt{e})-\ln 2$

B $\ln(1+e)-\ln 2$

C $2\ln(1+\sqrt{e})-\ln 2$

D $2\ln(1+e)-\ln 2$

E $2\ln(1+e)-2\ln 2$

37. Пусть $y(x)$ есть максимальное решение задачи Коши

$$y' = -\frac{x+1/2}{x^2+x+1}y$$

при начальном условии $y(0)=1$. Тогда предел $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$

A равен -1

B равен 0

C равен 1

D равен e^2+e+1

E не существует

38. Пусть M есть множество пар (x, y) на плоскости $\mathbf{R}^2$:

$$M = \left\{(x, y)\colon |y| \leqslant \sin\frac{1}{x}\right\}.$$

Тогда

A множество M открыто

B множество M замкнуто

C множество M ограничено

D множество M имеет конечную площадь

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

39. Пусть $y(x)$ есть максимальное решение задачи Коши $y' = 2-\dfrac{y}{x}$ при начальном условии $y(1)=2$. Тогда наименьшее значение функции $y(x)$ на ее области определения есть

A 0

B $\dfrac{1}{e^2}$

C 1

D 2

E не существует

40. Площадь фигуры, заключенной между кривыми $y=0$, $y=\sin x$ и $y=\cos x$ при $x\in[0,\pi/2]$, равна

A $2-1/\sqrt{2}$

B 1

C $2-\sqrt{2}$

D $2-\pi/2$

E 2

8.1.2 Вторая часть теста

1. Последовательность функций $f_n(x)$ на множестве *неотрицательных* вещественных чисел x задается формулой:

$$f_n(x)=\int_0^x \frac{dt}{t^2-n(n+1)t+n^3},$$

для всех натуральных $n\geqslant 2$. Пусть D_n есть область определения функции $f_n(x)$, а Z_n есть область значений функции $f_n(x)$. Тогда

а) для любого $x\in[0,+\infty)$ найдется $n\geqslant 2$, такое что $x\in D_n$;

Да Нет

б) для любого $y\in(-\infty,+\infty)$ найдется $n\geqslant 2$, такое что $y\in Z_n$;

Да Нет

в) для любого x, такого что $x\in D_N$ для некоторого N, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$;

Да Нет

г) для любого x, такого что $x\in D_N$ для некоторого N, $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)=0$;

Да Нет

д) для любого $n\geqslant 2$ и для любого $x\in D_n$, $f'_n(x)>0$;

Да Нет

е) для любого $n\geqslant 2$ и для любого $x\in D_n$, $f''_n(x)>0$;

Да Нет

ж) ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n(n-1)$ сходится;

Да Нет

з) ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} f'_n(n-1)$ сходится.

Да Нет

2. Рассмотрим последовательность $b_n = \sqrt[n]{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, а также последовательность a_n, рекуррентно заданную как $a_1 = 1$, $a_n = b_n a_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$. Тогда

а) все члены последовательности $\{b_n\}$ различны;

Да Нет

б) последовательность $\{b_n\}$ монотонно убывает, начиная с некоторого члена;

Да Нет

в) последовательность $\{b_n\}$ сходится;

Да Нет

г) начиная с некоторого n, выполняется неравенство $b_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

Да Нет

д) начиная с некоторого n, выполняется неравенство $b_n \geqslant 1 + \dfrac{1}{n}$;

Да Нет

е) последовательность $\{a_n\}$ сходится;

Да Нет

ж) ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ расходится при $x = 1/e$;

Да Нет

з) ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости, равный 1.

Да Нет

3. Система уравнений $Bx = 0$, где $x \in \mathbf{R}^4$, имеет в качестве множества решений линейную оболочку системы векторов

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Известно, что матрица BB^{T} невырожденная, а у матрицы $A = B^{\mathrm{T}}B$ характеристический многочлени имеет вид $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2)^2$ (здесь через B^{T} обозначена матрица, транспонированная к B). Известно также, что сумма элементов в каждой строке матрицы B равна двум. Тогда а) матрица A задает проектор в $\mathbf{R}^4$;

Да Нет

б) элементами матрицы A являются только нули и единицы;

Да Нет

в) матрица B не имеет нулевых элементов;

Да Нет

г) у матрицы B первый и последний столбцы ортогональны;

Да Нет

д) характеристический многочлен матрицы BB^T имеет вид $\lambda^2 - 4$;

Да Нет

е) матрица A вырожденная;

Да Нет

ж) имеются ровно два варианта матрицы B;

Да Нет

з) множество решений системы $Az = 0$ имеет размерность два.

Да Нет

4. Дана последовательность функций $f_n(t) = ne^{-n|t|}, t \in \mathbf{R}, n = 1, 2, \ldots$, и пусть $g_n(x) = \int_x^{1-x} f_n(t)\,dt$. Обозначим через M множество тех x, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$, и для $x \in M$ обозначим $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$. Тогда

а) существует отрезок $[a, b]$, на котором последовательность $f_n(t) = ne^{-n|t|}, n = 1, 2, \ldots$ сходится равномерно;

Да Нет

б) на интервале $(0, 1)$ последовательность $f_n(t) = ne^{-n|t|}, n = 1, 2, \ldots$ сходится равномерно;

Да Нет

в) множество M замкнуто и $g(x)$ является неограниченной функцией на M;

Да Нет

г) функциия $g(x)$ не возрастает на M;

Да Нет

д) функция $g_3(x)$ имеет на интервале $(0, 1)$ строгий локальный минимум;

Да Нет

е) функция $g(x)$ непрерывна справа на M;

Да Нет

ж) уравнение $g(x) = 1$ имеет решение в M;

Да Нет

з) последовательность $\{g_n(x), n = 1, 2 \ldots\}$ сходится равномерно на отрезке $[2, 3]$.

Да Нет

5. Даны функция $f(x, y) = x^2(x - 3)$ и множество $M = \left\{(x, y)\colon x^2 + y^2 = x^4 + y^4\right\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в трех точках;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в трех точках;

Да Нет

д) точка $(-1, 0)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

е) точка $(1, 0)$ является точкой локального миниимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

ж) точка $(0, 1)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) точка $\left(-\sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

Да Нет

8.2 Ответы и решения теста

8.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. D. **2.** D. **3.** E. **4.** B. **5.** C. **6.** E. **7.** C. **8.** D. **9.** C. **10.** A. **11.** C. **12.** C. **13.** C. **14.** D. **15.** D. **16.** A. **17.** E. **18.** C. **19.** C. **20.** C. **21.** B. **22.** D. **23.** E. **24.** C. **25.** E. **26.** C. **27.** D. **28.** D. **29.** E. **30.** D. **31.** A. **32.** A. **33.** B. **34.** C. **35.** C. **36.** E. **37.** B. **38.** E. **39.** D. **40.** C.

8.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Корни квадратного трехчлена в знаменателе подынтегрального выражения равны n и n^2. Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов и разложим подынтегральное выражение в сумму простых дробей вида

$$\frac{1}{t^2-n(n+1)t+n^3}=\frac{A}{t-n}+\frac{B}{t-n^2}.$$

Отсюда получаем соотношения на коэффициенты A и B:

$$\begin{cases} At+Bt=0, \\ -An^2-Bn=0. \end{cases}$$

Решив систему, получим $A=-\dfrac{1}{n^2-n}$, $B=\dfrac{1}{n^2-n}$.

Заметим, что подынтегральное выражение непрерывно на $[0,n)$ и стремится к $+\infty$ при t, стремящемся к n слева. Следовательно, при $x \geqslant n$ интеграл не существует, и функция $f_n(x)$ определена на множестве $[0,n)$. Значит, ответ на вопрос а) — «да».

Проинтегрировав найденную сумму простых дробей, получим выражение для $f_n(x)$:

$$f_n(x)=\frac{1}{n^2-n}\left(\ln\left(\frac{n^2-x}{n-x}\right)-\ln n\right)=\frac{1}{n^2-n}\ln\left(\frac{n^2-x}{n^2-nx}\right).$$

Производная (интеграла как функции верхнего предела) равна

$$f_n'(x)=\frac{1}{x^2-n(n+1)x+n^3}$$

и вторая производная равна

$$f_n''(x)=\frac{n(n+1)-2x}{(x^2-n(n+1)x+n^3)^2}.$$

Как видим, производная $f_n'(x)$ при всех $x\in(0,n)$ положительная. Следовательно, сама функция $f_n(x)$ при всех $x\in[0,n)$ неотрицательная, и ответ на вопрос б) — «нет» и на вопрос д) — «да». Вторая производная тоже положительная при всех $x\in(0,n)$, поэтому ответ на вопрос е) — «да».

Несложно видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)=0$ при всех $x\geqslant 0$ (при этом для каждого неотрицательного x определены все функции $f_n(x)$ и $f_n'(x)$, начиная с некоторого n). Следовательно, ответы на вопросы в) — «да» и г) — «да».

Подставим $n-1$ в качестве аргумента $f_n(x)$. Получим, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(n-1)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n^2-n+1)-\ln n}{n^2-n}.$$

Заметим, что
$$\frac{\ln(n^2-n+1)-\ln n}{n^2-n}<\frac{2\ln n}{n^2},$$
а значит ряд сходится, и ответ на вопрос ж) — «да».

Подставим $n-1$ в качестве аргумента $f_n'(x)$. Получим, что ряд
$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n'(n-1)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2-n(n+1)(n-1)+n^3}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n+1}.$$
Заметим, что
$$\frac{1}{n^2-n+1}<\frac{2}{n^2},$$
а значит ряд сходится, и ответ на вопрос з) — «да».

Задача 2. В пункте а) ответ «нет», потому что $b_2=\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}=b_4$.

В пункте б) ответ «да». Действительно, $\ln b_n=\dfrac{\ln n}{n}$. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, определённую при всех $x>0$, и возьмём от неё производную: $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$ при $x>e$. Тем самым, функция $f(x)$ убывает при $x>e$ и тем более при $x>3$. А это означает, что и последовательность $b_n=f(n)$ убывает, начиная с $n=3$.

В пункте в) ответ «да», потому что последовательность b_n положительная (и значит ограничена снизу нулём) и убывающая, начиная с $n=3$, по предыдущему пункту. Поэтому последовательность b_n сходится. Более того, этот предел равен единице.

В пункте г) ответ «да». Доказательство: переформулируем условие в виде $n^{1/\sqrt{n}}\leqslant\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$ (просто возведя исходное неравенство в степень $\sqrt{n}$). Теперь мы видим, что при больших n правая часть сходится к e, и значит, начиная с некоторого n она становится больше 2 (более того, можно показать, что правая часть больше 2 при $n>1$). Что касается левой части, то ее предел равен единице, и значит, начиная с некоторого n она становится меньше 2. Следовательно, начиная с некоторого n, неравенство выполняется.

в пункте д) ответ «да»: последовательность $(1+1/n)^n$ сходится к $e<3$, поэтому, начиная с некоторого $n=n_0$, мы имеем: $3>(1+1/n)^n$, и тогда, начиная с $n=\max\{n_0,3\}$, будет верно $n>(1+1/n)^n \Leftrightarrow b_n\geqslant 1+1/n$, что и требовалось доказать.

В пункте е) ответ «нет». В самом деле, последовательность a_n сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность $\ln a_n=\sum\limits_{m=2}^{n}\dfrac{\ln m}{m}$. Но из этой формулы видно, что при $n>1$ $\ln a_n$ больше n-го члена гармонического ряда, за вычетом единицы: $\ln a_n>\sum\limits_{m=2}^{n}\dfrac{1}{m}$. Но гармонический ряд расходится, следовательно, последовательность $\ln a_n$, а вместе с ней и последовательность a_n, тоже расходится.

Чтобы опровергнуть (неверное) утверждение в пункте ж), мы докажем верность утверждения в пункте з). Воспользуемся признаком Даламбера: отношение соседних коэффициентов ряда равно b_n, а последовательность b_n сходится к единице. То есть отношение соседних коэффициентов ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ сходится к единице, поэтому его радиус сходимости равен единице, что и требовалось доказать в пункте з). Так как $1/e < 1$, то этот ряд сходится при $x = 1/e$, что и доказывает неверность утверждения ж).

Задача 3. Так как размерность множества решений системы $Bx = 0$ равна двум, то ранг матрицы B тоже равен двум. Ввиду невырожденности матрицы BB^{T} строки матрицы B линейно независимые, так что матрица B имеет размеры 2×4.

Матрица A симметричная, и поэтому у нее имеется полная система собственных векторов. Заданные в условиях два решения системы $Bx = 0$ являются двумя линейно независимыми собственными векторами матрицы A для собственного числа ноль (тем самым, матрица A вырожденная). В качестве собственных векторов матрицы A, соответствующих собственному числу 2 (кратности тоже 2), можно взять любую линейно независимую пару столбцов, ортогональных решениям системы $Bx = 0$. Например,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{1}$$

Но строки матрицы B, будучи транспонированными в столбцы, тоже годятся. Поэтому каждый из столбцов матрицы B^{T} является линейной комбинацией столбцов (1). А поскольку сумма элементов по строкам у матрицы B равна двум, то матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta & \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

при некоторых α и β. С другой стороны $AB^{\mathsf{T}} = 2B^{\mathsf{T}}$, то есть $(B^{\mathsf{T}}B)B^{\mathsf{T}} = 2B^{\mathsf{T}}$. Умножив это равенство слева на B и учитывая невырожденность матрицы BB^{T}, получим $BB^{\mathsf{T}} = 2I$, где I — единичная матрица второго порядка. Таким образом, $\alpha^2(1-\alpha)^2 = 1$, $\beta^2 + (1-\beta)^2 = 1$, $\alpha\beta + (1-\alpha)(1-\beta) = 0$. Первые два равенства дают, что α и β могут равняться лишь нулю или единице. Третье же равенство показывает, что из возможных комбинаций годятся только две: $\alpha = 0$, $\beta = 1$ или $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Для матрицы B это дает два возможных значения:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что оба варианта пригодны. Таким образом, ответы: а) — «нет» (та как у матрицы A есть собственное число 2), б) — «да», в) — «нет», г) — «да», д) — «нет», е) — «да», ж) — «да», з) — «да».

Задача 4. Легко видеть, что каждая функция $f_n(x)$ является четной и $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,dt = 2$. Очевидно, что при $t = 0$ последовательность $\{f_n(t)\}$ расходится, и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 0$ при любом $t \neq 0$. Пусть $[a, b]$ — произвольный отрезок, для которого $a > 0$. Так как функция

$f_n(t)$ убывает на $[a, b]$, то $\max_{t\in[a,b]} f_n(t) = ne^{-an}$ и $ne^{-an} \to 0$ при $n \to \infty$. Из критерия равномерной сходимости следует, что $f_n(t) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно на $[a, b]$.

На интервале $(0, 1)$ последовательность $\{f_n(t)\}$ не является равномерно ограниченной, поэтому равномерная сходимость на $(0, 1)$ отсутствует. Таким образом, на вопрос а) ответ «да», на вопрос б) — «нет».

Непосредственными вычислениями получаем следующие результаты:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = 2 \text{ при всех } a < 0,\ b > 0; \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = 0 \text{ при всех } a > 0,\ b > 0; \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^b f_n(t)dt = 1 \text{ при всех } b > 0. \tag{4}$$

Отсюда и из четности функций $f_n(t)$ следует, что $M = \mathbf{R}$, т.е. функция $g(x)$ определена при всех вещественных x.

1. Пусть $x < 0$. Тогда $1 - x > 0$, и в силу (2) $g(x) = 2$.

2. Если $x = 0$, то в силу (4) $g(x) = 1$.

3. Если $0 < x < 1/2$, то $x < 1 - x$, и в силу (3) $g(x) = 0$.

4. При $x = 1/2$, очевидно, $g(x) = 0$.

5. Если $1/2 < x < 1$, то $x > 1 - x$, $x > 0$, $1 - x < 0$ и в силу (3) $g(x) = 0$.

6. При $x = 1$ в силу (4) $g(x) = -1$.

7. Если $x > 1$, то $1 - x < 0$, и в силу (2) $g(x) = -2$.

Окончательно получаем:

$$g(x) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ 0, & 0 < x < 1, \\ -1, & x = 1, \\ -2, & x > 1. \end{cases}$$

Поэтому на вопрос в) ответ «нет», на вопрос г) — «да», на вопрос е) — «нет», на вопрос ж) — «да».

Так как $f_3(x) > 0$ при всех x, нижний предел интегрирования в определении функции $g_3(x)$ возрастает, а верхний убывает, то функция является строго убывающей. Поэтому на вопрос д) ответ «нет».

Прямыми вычислениями получаем, что

$$\max_{x\in[2,3]} |g_n(x) - 2| = e^{-n} + e^{-2n} \to 0,\ n \to \infty.$$

В силу критерия равномерной сходимости отсюда следует, что последовательность $\{g_n(x)\}$ сходится на $[2,3]$ равномерно. Ответ на вопрос з) — «да».

Задача 5. Заметим, что множество M является компактом (замкнутость следует из того, что M есть множество уровня непрерывной в $\mathbf{R}^2$ функции, кроме того, M содержится в квадрате $|x| \leqslant 2$, $|y| \leqslant 2$). Следовательно, функция $f(x,y)$ достигает на M своего наименьшего и наибольшего значения, причем в точках, в котороых выполнены условия первого порядка.

Запишем функцию Лагранжа для нашей задачи:

$$L = \lambda_0 x^2(x-3) + \lambda(x^2 + y^2 - x^4 - y^4).$$

Условия первого порядка следующие (с добавленным к ним уравнением связи):

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \lambda_0(3x^2 - 6x) + \lambda(2x - 4x^3) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = \lambda(2y - 4y^3) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - x^4 - y^4 = 0.$$

При этом λ_0 и λ одновременно не могут быть равны нулю.

Рассмотрим случай, когда $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda \neq 0$ и $2x - 4x^3 = 0$, $2y - 4y^3 = 0$, $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$. Единственное решение этой системы $x = 0$, $y = 0$. Это нерегулярная точка, значение функции в которой $f(0,0) = 0$.

Теперь положим $\lambda_0 = 1$ и рассмотрим несколько случаев.

1) Случай $\lambda = 0$. Условия первого порядка принимают вид $3x^2 - 6x = 0$, $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$, Откуда находим три точки: $x = 0$, $y = 0$ (эта точка уже рассмотрена ранее); $x = 0$, $y = 1$; и наконец $x = 0$, $y = -1$. Значение функции $f(x,y)$ в каждой из этих точек равно нулю.

2) Случай $\lambda \neq 0$. Из второго условия первого порядка получаем, что y может принимать одно из трех значений: $y = 0$, $y = 1/\sqrt{2}$, $y = -1/\sqrt{2}$.

Случай $y = 0$ дает нам две дополнительные точки $x = 1$, $y = 0$ и $x = -1$, $y = 0$. Значения функции $f(x,y)$ в этих точках равны -2 и -4 соответственно.

Подставив $y = \pm 1/\sqrt{2}$ в уравнение связи, получим уравнение, из которого можно найти x: $x^2 + 1/2 - x^4 - 1/4 = 0$. Отсюда $x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$. Таким образом, мы нашли последние четыре особые точки $x = -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$, $y = \pm 1/\sqrt{2}$ и $x = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$, $y = \pm 1/\sqrt{2}$. Значение функции $f(x,y)$ равно $-\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\left(3 + \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}\right) < -4$ в двух первых точках и равно $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} - 3\right) < 0$ в двух оставшихся точках.

Таким образом, наибольшее значение функции $f(x,y)$ на множестве M равно 0 и достигается в трех точках $(0,0)$, $(0,-1)$, $(0,1)$. Значит ответ на вопрос а) — «нет», на вопрос б) — «да» и на вопрос ж) — «нет» (так как точка $(0,1)$ является точкой максимума). Наименьшее значение равно $-\frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(3+\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$ и достигается в двух точках $\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Значит ответ на вопрос в) — «да», на вопрос г) — «нет» и на вопрос з) — «да».

Для того, чтобы ответить на вопросы д) и е) потребуется проверить условие второго порядка. Матрица вторых производных функции Лагранжа равна

$$D^2L = \begin{pmatrix} 6(x-1)+\lambda(2-12x^2) & 0 \\ 0 & \lambda(2-12y^2) \end{pmatrix}.$$

Ее необходимо проверить на знакоопределенность в точках $(-1,0)$ и $(1,0)$ на касательных векторах множества M (т. е. ортогональных градиенту уравнения связи). Градиент уравнения связи равен $(2x-4x^3, 2y-4y^3)$, поэтому в обеих точках касательные векторы имеют вид $(0,\nu)^{\mathsf{T}}$, где $\nu \in \mathbf{R}$.

В точке $(-1,0)$ значение $\lambda = -9/2$, поэтому

$$\begin{pmatrix} 0 & \nu \end{pmatrix} D^2L \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} = -9\nu^2 < 0 \quad (\text{при } \nu \neq 0).$$

Следовательно, точка $(-1,0)$ является точкой локального максимума (ответ на вопрос д) — «да»).

В точке $(1,0)$ значение $\lambda = -3/2$, поэтому

$$\begin{pmatrix} 0 & \nu \end{pmatrix} D^2L \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} = -3\nu^2 < 0 \quad (\text{при } \nu \neq 0).$$

Следовательно, точка $(1,0)$ является точкой локального максимума (ответ на вопрос е) — «нет»).

9 Вступительный экзамен 2008 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

9.1 Тест

9.1.1 Первая часть теста

1. Дана задача Коши $y' = y\cos x$, $y(0) = 1$. Предел максимального (непродолжаемого) решения $y(x)$ при $x \to +\infty$ равен

A $\quad 0$

B $\quad 1$

C $\quad e$

D $\quad +\infty$

E $\quad$ не существует

2. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \dfrac{y^2}{x^2}$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, определено на множестве

A $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

B $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

C $(0, +\infty)$

D $(-1, +\infty)$

E $(-\infty, +\infty)$

3. Значение максимального (непродолжаемого) решения задачи Коши $y' = (y-1)^2$, $y(1) = 0$, в точке $x = -1$ равно

A -1

B 0

C 1

D 2

E не определено

4. Функция $f(x, y) = x^2$ достигает наименьшего значения на множестве $\{(x, y) \colon y^3 - y\cos x + \sin x = 0\}$

A ровно в одной точке

B ровно в двух точках

C ровно в трех точках

D ровно в четырех точках

E не достигает наименьшего значения

5. Функция $f(x, y) = xy$ на множестве $\{(x, y) \colon x^2 + y^2 = 1\}$

A достигает наименьшего значения в единственной точке

B достигает наибольшего значения в единственной точке

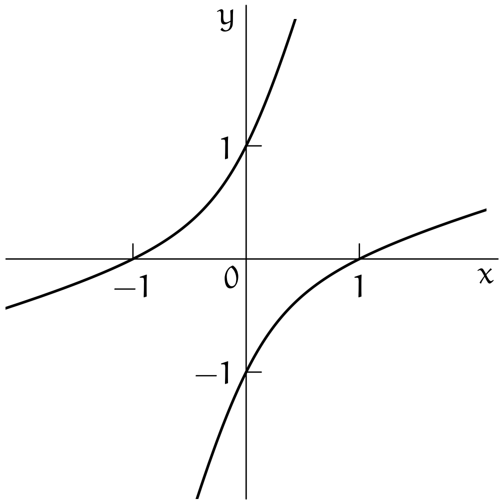
C не достигает наибольшего значения

D не достигает наименьшего значения

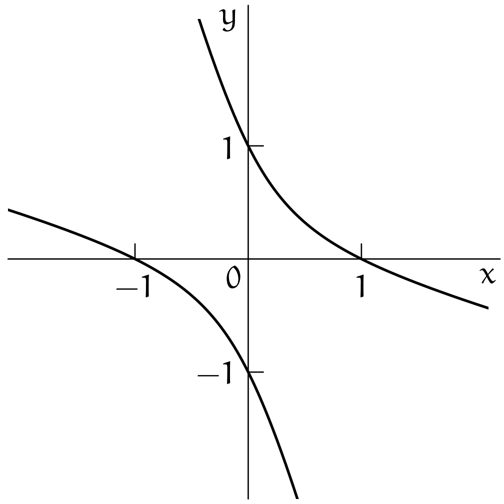
E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Множество $\{(x, y) \colon x^2 + 4xy + y^2 = 1\}$ есть

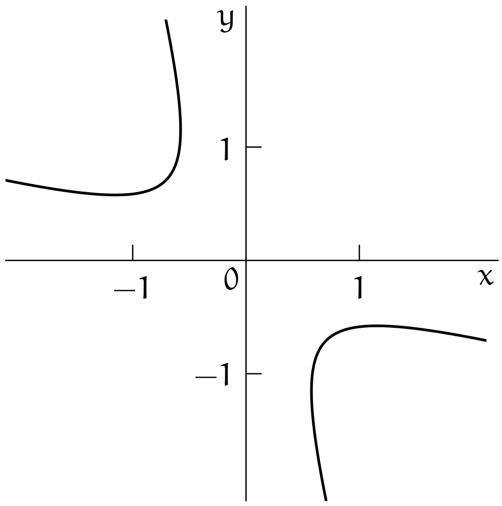
A



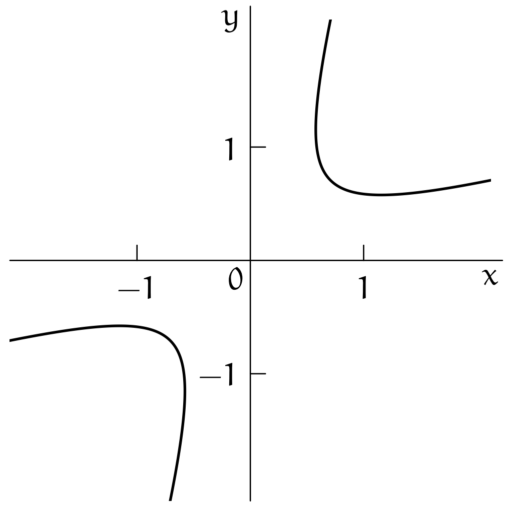
B



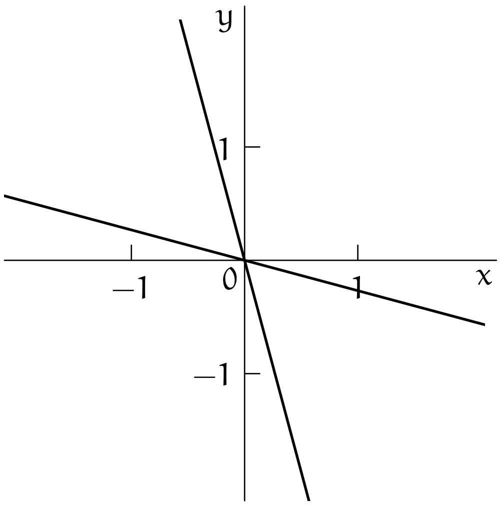
C



D



E



7. Пусть F — подмножество $\mathbf{R}$, и x — предельная точка F. Тогда

A $\quad x$ — изолированная точка F

B $\quad x$ — внешняя точка F

C $\quad x$ — граничная точка F

D $\quad x$ — внутренняя точка F

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Пусть A — непустое подмножество $\mathbf{R}$, у которого множество внутренних точек пустое. Тогда

A множество граничных точек множества A непустое

B множество внешних точек множества A непустое

C множество A не более, чем счетное

D множество A имеет мощность континуума

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть F — замкнутое, G — открытое подмножества $\mathbf{R}$, и x — точка, принадлежащая пересечению $F \cap G$. Найдите ***ложное*** утверждение

A если x — предельная точка G, то x — предельная точка $F \cap G$

B если x — предельная точка F, то x — предельная точка $F \cap G$

C если x — внутренняя точка F, то x — внутренняя точка $F \cap G$

D если x — изолированная точка F, то x — изолированная точка $F \cap G$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

10. На интервале (a, b) задана последовательность функций $\{f_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$. Известно, что при каждом $x \in (a, b)$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Тогда

A если каждая функция $f_n(x)$ разрывна на (a, b), и последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на (a, b), то функция $f(x)$ разрывна на (a, b)

B если каждая функция $f_n(x)$ непрерывна на (a, b), и последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к $f(x)$ неравномерно на (a, b), то функция $f(x)$ разрывна на (a, b)

C если каждая функция $f_n(x)$ разрывна на (a, b), и последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к $f(x)$ неравномерно на (a, b), то функция $f(x)$ непрерывна на (a, b)

D если каждая функция $f_n(x)$ ограничена на (a, b), а функция $f(x)$ является неограниченной на (a, b), то последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к $f(x)$ неравномерно на (a, b)

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. На плоскости xOy дано множество $M = \{(x, y) \colon y^2 - x^2 = 1\}$ и функция $f(x, y) = x^2 + 2y^2$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. Функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наименьшего значения.

II. Точка $(0, 1)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

III. Множество значений функции $f(x, y)$ на множестве M ограничено сверху.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

12. На отрезке $[a, b]$ задана функция $f(t)$, интегрируемая по Риману на этом отрезке. Пусть $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Тогда

A если функция $f(t)$ неубывающая, то функция $F(x)$ дифференцируема в каждой точке $x \in (a, b)$

B если функция $f(t)$ имеет разрыв в точке $x_0 \in (a, b)$, то функция $F(x)$ не дифференцируема в точке x_0

C если в точке $x_0 \in (a, b)$ функция $f(t)$ имеет разрыв второго рода, то функция $F(x)$ разрывна в точке x_0

D если функция $F(x)$ является возрастающей на $[a, b]$, то $f(t) \geqslant 0$ при всех $t \in$ $\in (a, b)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Уравнение $x^4 + 1 = kx$, где $k > 0$, имеет единственное решение при

A $k = \sqrt[4]{4}$

B $k = \dfrac{4}{\sqrt[4]{27}}$

C $k = 2\sqrt[4]{9}$

D $k = 3\sqrt[4]{3}$

E $k = 4\sqrt[4]{3}$

14. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$

A равен -1

B равен $-1/2$

C $\quad$ равен $-1/4$

D $\quad$ равен $-1/8$

E $\quad$ не существует

15. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ определяется соотношениями $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n + 1}$, $x_1 > 0$. Тогда

A $\quad$ существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ является строго возрастающей

B $\quad$ существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ является строго убывающей

C $\quad$ существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ является неограниченной

D $\quad$ при любом $x_1 > 0$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ является сходящейся

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Пусть для каждого $x \in \mathbf{R}$

$$f_n(x) = n \log_{x^2+x+2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

и пусть M — множество тех x, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Для всех $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. $M = \mathbf{R}$.

II. График функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту.

III. График функции $f(x)$ имеет вертикальную асимптоту.

A $\quad$ только I

B $\quad$ только I и II

C $\quad$ только I и III

D $\quad$ только II и III

E $\quad$ I, II и III

17. Длина ребра куба увеличивается со скоростью, пропорциональной поверхности куба. В момент времени $t = 0$ длина ребра равна 1, а в момент $t = 2$ длина ребра равна 2. Длина ребра в момент времени $t = 3$ равна

A 4

B 5

C 10

D 15

E 18

18. Интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$ равен

A $1/2$

B $\ln 2$

C 1

D $2\ln 2$

E не равен ни одному из вариантов A, B, C, D

19. Интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$ равен

A $1/2$

B $\ln 2$

C 1

D $2\ln 2$

E не равен ни одному из вариантов A, B, C, D

20. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x}-1}{e^{\sin x}-1}$ равен

A -1

B 0

C $1/e$

D 1

E не равен ни одному из вариантов A, B, C, D

21. Предел $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{ctg} x^2$ равен

A -1

B 0

C 1

D $\pi^2/4$

E не равен ни одному из вариантов A, B, C, D

22. Числовая последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ задана формулами

$$a_{n+1} = 1 + \frac{2 + 1/n}{a_n}, \quad a_1 = 1.$$

Тогда предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ равен

A -2

B -1

C 0

D 1

E 2

23. Пусть $S(a)$ есть площадь фигуры, заключенной между линиями $x + y = 1$ и $x^{1/a} + y^{1/a} = 1$, где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $a > 0$. Тогда предел $\lim\limits_{a\to+\infty} S(a)$ равен

A $1/4$

B $1/2$

C 1

D $3/2$

E 2

24. Пусть M есть подмножество $\mathbf{R}$, заданное формулой

$$M = \left\{ x \neq 0\colon\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant 0 \right\}.$$

Какие из следующих утверждений (I, II, III) являются ***ложными***?

I. Точка $x = 0$ является единственной предельной точкой множества M.

II. Замыкание множества M совпадает с множеством M.

III. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует точка x, не принадлежащая M, такая что $|x| < \varepsilon$.

A только I и II

B только I и III

C только II и III

D только I, II и III

E ни одно из I, II и III

25. Пусть A — матрица размеров $m \times n$ с линейно зависимыми строками. Тогда

A если у системы $Ax = 0$ существует только нулевое решение, то $m > n + 1$

B если у системы $Ax = 0$ существует ненулевое решение, то $m < n + 1$

C если $m > n + 1$, то ранг матрицы A равен n

D если $m < n + 1$, то ранг матрицы A меньше n

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

26. Пусть A и B — матрицы размеров $m \times n$. Известно, что любой вектор $z \in \mathbf{R}^n$ представим в виде $z = x + y$, где $Ax = 0$ и $By = 0$. Тогда

A если n нечетное, то ранги матриц A и B различные

B если существует ненулевой $x \in \mathbf{R}^n$, при котором $Ax = 0$ и $Bx = 0$, то сумма рангов матриц A и B строго больше n

C если объединенная система $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$ имеет только нулевое решение, то сумма рангов матриц A и B равна n

D если существует $x \in \mathbf{R}^n$, при котором $Ax = 0$ и $Bx = 0$, то сумма рангов матриц A и B строго меньше n

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

27. Пусть A и B — матрицы размеров $m \times n$, a и b — столбцы длины m, x — искомый столбец длины n. Тогда

A если система $(A + B)x = (a + b)$ не имеет решения, то не имеет решения хотя бы одна из систем $Ax = a$ и $Bx = b$

B если объединенная система $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ не имеет решения, то не имеет решения хотя бы одна из систем $Ax = a$ и $Bx = b$

C если система $(A+B)x = (a+b)$ имеет решение, то имеют решения обе системы $Ax = a$ и $Bx = b$

D если $n = m$ и система $Ax = a$ совместна, а система $(AB)x = a$ несовместна, то существует b, при котором система $Bx = b$ несовместна.

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

28. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 6$, а через $\det X$ обозначается определитель квадратной матрицы X. Тогда

A если $\det(A - B) \neq 0$, то $\det A \neq \det B$

B если A и B отличаются лишь перестановкой строк, то $\det A = \det B$

C если $\det B \neq 0$, а $\det(AB) = 0$, то $\det A = 0$

D если $\det A \neq 0$ или $\det B \neq 0$, то $\det(AB) \neq 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

29. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 6$. Тогда

A линейная оболочка столбцов матрицы A совпадает с линейной оболочкой столбцов матрицы A^2

B линейная оболочка столбцов матрицы A не совпадает с множеством решений системы $Ax = 0$

C существует ненулевое решение системы $Ax = 0$, являющееся линейной комбинацией столбцов матрицы A

D не существует ненулевого решения системы $Ax = 0$, являющегося линейной комбинацией столбцов матрицы A

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 6$. Тогда

A если $\lambda < 0$ является собственным числом матрицы A^2, то матрица A симметричная

B если у матрицы A нет вещественных собственных чисел, то инвариантными подпространствами для нее являются только все $\mathbf{R}^n$ и нульмерное подпространство

C если у матрицы A нет вещественных собственных чисел, то матрица A невырожденная

D если у матрицы A имеется полная система (вещественных) собственных векторов, то она симметричная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. Пусть A и B — вещественные квадратные матрицы порядка $n \geqslant 6$, причем A — симметричная матрица. Тогда

A если для некоторого $x \in \mathbf{R}^n$ $Ax \neq 0$, то $x^\top Ax \neq 0$

B если матрица B ненулевая, то существует $x \in \mathbf{R}^n$, при котором $x^\top Bx \neq 0$

C если матрица $B^T AB$ не является положительно определенной, то и матрица A не является положительно определенной

D если матрица B симметричная и положительно полуопределенная, а квадратичная форма $x^T ABx$ не является положительно полуопределенной, то и матрица A не является положительно полуопределенной

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Пусть A — матрица размеров $m \times n$, $a \in \mathbf{R}^m$, и M — множество решений системы $Ax = a$. Тогда

A если множество M ограничено, то $m = n$

B если множество M неограничено, то $m < n$

C если столбцы матрицы A линейно зависимые, то множество M неограничено

D если столбцы матрицы A линейно независимые, то множество M ограничено

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

33. Последовательность вещественных чисел a_n сходится. Тогда

A $[a_n]$ сходится, где $[x]$ — это целая часть вещественного числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x)

B $\{a_n\}$ сходится, где $\{x\}$ — это дробная часть вещественного числа x (разность x и целой части x)

C $[a_n] + \{a_n\}$ сходится

D $[a_n] - \{a_n\}$ сходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

34. Функция $f(x)$ определена на $\mathbf{R}$ и является строго возрастающей. Тогда

A Последовательность a_n, заданная рекуррентно как $a_1 = 1$, $a_n = f(a_{n-1})$ при $n \geqslant 2$, сходится

B Для любой сходящейся последовательности a_n последовательность $f(a_n)$ тоже сходится

C Для любой сходящейся строго возрастающей последовательности a_n последовательность $f(a_n)$ тоже сходится

D Для любой расходящейся последовательности a_n последовательность $f(a_n)$ тоже расходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

35. Пусть $f(x)$, $g(x)$ — две монотонные функции, заданные на $\mathbf{R}$, причем $f(x)$ — строго возрастающая, а $g(x)$ — строго убывающая функция. Тогда

A композиция $f(g(x))$ возрастает

B одна из композиций $f(g(x))$, $g(f(x))$ возрастает

C функция $g(g(x))$ возрастает

D обратная функция $g^{-1}(x)$ возрастает

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R. Тогда

A ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n^2} y^n$ имеет радиус сходимости R

B если $R > 0$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n^2} y^n$ расходится везде, кроме нуля

C ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n^2} y^n$ либо везде сходится, либо везде, кроме нуля, расходится

D если $R \neq 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n^2} y^n$ либо везде сходится, либо везде, кроме нуля, расходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

37. Последовательность вещественных чисел $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится. Рассмотрим три утверждения: (i) последовательность $\{(-1)^n a_n\}$ расходится; (ii) последовательность $\{|a_n|\}$ сходится; (iii) последовательность $\{a_n - a_{n-1}\}$ сходится к нулю. Тогда

A утверждение (i) истинное

B одно из утверждений (ii) и (iii) ложное

C среди утверждений (i)–(iii) ровно одно истинное

D из утверждения (ii) следует утверждение (i)

E либо верно (i), либо верно (iii), но не одновременно

38. Рассмотрим два сходящихся ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда

A ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

B ряд $a_1 + b_2 + a_3 + b_4 + a_5 + \dots$ сходится

C последовательность $a_n + \dots + a_{2n}$ сходится к нулю

D существует такое целое число $k > 0$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^k$ сходится абсолютно

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

39. Рассмотрим сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и последовательность $\{b_n, n = 1, 2, \dots\}$. Тогда

A если последовательность $\{b_n\}$ ограничена, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

B если $a_n \geqslant 0$ при всех n, а последовательность $\{b_n\}$ ограничена, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

C если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, то последовательность $\{b_n\}$ ограничена

D если последовательность $\{b_n\}$ ограничена, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n x^n$ имеет такой же радиус сходимости, как и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

40. Задана функция $f(x, y)$, определенная на $\mathbf{R}^2$. Известно, что она не убывает по x при фиксированном y и не возрастает по y при фиксированном x. Тогда

A не существует функции $f(x, y)$, удовлетворяющей сформулированным условиям

B функция $f^2(x)$ возрастает вдоль любого луча, исходящего из нуля

C последовательность $f(-n, n)$ монотонная

D уравнение $f(x, y) = f(0, 0)$ неявно определяет строго убывающую функцию $y = g(x)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9.1.2 Вторая часть теста

1. Пусть вещественная матрица A имеет размеры $m \times 4$. Известно, что система $Ax = 0$ имеет в качестве множества решений линейную оболочку системы столбцов

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Известно также, что матрица $B = AA^T$ ортогональная, а матрица $P = A^TA$ задает ортогональный проектор (через A^T обозначена матрица, транспонированная к A). Тогда

а) строки матрицы A линейно зависимые;

Да | Нет

б) строки матрицы A линейно независимые;

Да | Нет

в) строки матрицы A ортонормированные;

Да | Нет

г) сумма элементов в каждой строке матрицы A равна нулю;

Да | Нет

д) сумма элементов в каждой строке матрицы A отлична от нуля;

Да | Нет

е) ранг матрицы P равен трем;

Да | Нет

ж) сумма диагональных элементов матрицы P равна 2;

Да | Нет

з) сумма диагональных элементов матрицы P равна -2;

Да | Нет

2. Пусть

$$f_n(x) = \sqrt[n]{e^{nx} + e^{2nx} + e^{3nx}},\ g_n(x) = \frac{1 + e^{x-1} + e^{2(x-1)} + \ldots + e^{n(x-1)}}{1 + x + x^2 + \ldots + x^n},\ h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}.$$

Обозначим

$$M_1 = \left\{x\colon x \leqslant 0 \text{ и существует } \lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\},$$
$$M_2 = \left\{x\colon 0 < x < 1 \text{ и существует } \lim_{n\to\infty} g_n(x)\right\},$$
$$M_3 = \left\{x\colon x \geqslant 1 \text{ и ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} \text{ сходится}\right\}.$$

Функция $F(x)$ определяется соотношениями

$$F(x) = \begin{cases} ax + b \cdot \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & \text{при } x \in M_1,\\ \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x), & \text{при } x \in M_2,\\ c + d \cdot h(x), & \text{при } x \in M_3, \end{cases}$$

где a, b, c, d — некоторые числа. Тогда

а) функция $F(x)$ определена при любом вещественном x;

Да Нет

б) на множестве M_2 функция $F(x)$ строго возрастает;

Да Нет

в) существуют такие числа a, b, что функция $F(x)$ дифференцируема на $M_1 \cup M_2$;

Да Нет

г) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to 1-0} F'(x)$;

Да Нет

д) при любых $a \neq 0$, $d \neq 0$ и при любых b, c график функции $F(x)$ имеет наклонную асимптоту;

Да Нет

е) при $c = 0$ существует такое число d, что функция $F(x)$ непрерывна на $M_2 \cup M_3$, и точка $x = 1$ есть точка ее локального максимума;

Да Нет

ж) существуют такие числа c, d, что функция $F(x)$ дифференцируема на $M_2 \cup M_3$;

Да Нет

з) существуют такие числа a, b, c, d, что график функции $F(x)$ имеет вертикальную асимптоту.

Да Нет

3. Даны функция $f(x, y) = e^{-(3x^2+2y^2)}$ и множество $M = \{(x, y)\colon (x + y)(x^2 + y^2 - 1) = 0\}$. Тогда а) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в одной точке;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ не достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в одной точке;

Да Нет

д) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

е) функция $f(x, y)$ не достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

ж) точка $(1, 0)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) точка $(0, 1)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

Да Нет

4. Про функцию $f(x)$, заданную на $\mathbf{R}$, известно, что при всех x, y, таких что $x < y < 0$, выполняется неравенство $f(x) - f(y) \leqslant (x - y)^3$. Тогда

а) функция $f(x)$ монотонна при $x < 0$;

Да Нет

б) функция $f(x)$ строго возрастает при $x < 0$;

Да Нет

в) функция $f(x) = x^3$ удовлетворяет сформулированному в условии требованию;

Да Нет

г) функция $f(x) = x^3$ удовлетворяет неравенству $f(x) - f(y) \leqslant (x - y)^3$ при всех $x < y$.

Да Нет

5. Пусть функция $f(x)$ определена на $\mathbf{R}$ и удовлетворяет другому требованию, а именно при всех x, y, таких что $x > y$, выполняется неравенство $f(x) - f(y) \leqslant (x - y)^3$. Тогда

а) функция $f(x)$ непрерывна на всем $\mathbf{R}$;

Да Нет

б) точка $x = 0$ является точкой строгого локального максимума функции $f(x)$;

Да Нет

в) при всех x, y, таких что $x > y$, выполняется неравенство $f(x) - f(y) \leqslant (x - y)^2$;

Да Нет

г) не существует ни одной функции, удовлетворяющей требованию $f(x) - f(y) \leqslant (x - y)^3$ при всех $x, y \in \mathbf{R}$.

Да Нет

6. Максимальное (непродолжаемое) решение $y(x)$ дифференциального уравнения

$$y' = \frac{\cos x}{2y}$$

удовлетворяет условию $y(0) = 1$. Пусть $g(x) = \dfrac{1}{y(x)}$. Тогда

а) областью определения функции $y(x)$ является интервал $(-\infty, +\infty)$;

Да Нет

б) область определения функции $g(x)$ совпадает с областью определения функции $y(x)$;

Да Нет

в) функция $y(x)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

г) функция $g(x)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

д) функция $y(x)$ периодическая на своей области определения;

Да Нет

е) функция $g(x)$ имеет вертикальную асимптоту;

Да Нет

ж) для всякого натурального числа N найдется $\delta > 0$, такое что число решений уравнения $g(x) = \delta$ больше N;

Да Нет

з) существует $\delta > 0$, такое что число решений уравнения $y(x) = \delta$ и $g(x) = \delta$ одинаковое.

Да Нет

9.2 Ответы и решения теста

9.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. E. **2.** C. **3.** E. **4.** C. **5.** E. **6.** B. **7.** E. **8.** A. **9.** A. **10.** D. **11.** B. **12.** E. **13.** B. **14.** C. **15.** D. **16.** B. **17.** A. **18.** C. **19.** C. **20.** D. **21.** C. **22.** E. **23.** B. **24.** A. **25.** D. **26.** C. **27.** D. **28.** C. **29.** E. **30.** C. **31.** E. **32.** D. **33.** C. **34.** C. **35.** C. **36.** E. **37.** E. **38.** C. **39.** B. **40.** C.

9.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Заметим, что матрица $B = AA^T$ ортогональная, симметричная и положительно определенная. Существует единственная такая матрица — единичная. Значит $B = I$. Элементы матрицы B есть скалярные произведения строк матрицы A. Поэтому, так как B единичная матрица, то строки матрицы A ортонормированные и, как следствие, линейно независимые (ответы на вопросы а) — «нет», б) — «да», в) — «да»).

Ранг матрицы A равен 2 в силу того, что пространство решений системы $Ax = 0$ имеет размерность 2 (размерность столбца x равна 4).

Так как столбец $(1, 1, 1, 1)^T$ является решением системы $Ax = 0$, а произведение строки матрицы A на этот столбец равно сумме элементов этой строки, то сумма элементов в каждой строке матрицы A равна нулю (ответы на вопросы г) — «да», д) — «нет»).

Ранг матрицы $P = A^TA$ совпадает с рангом матрицы A, который равен 2 (ответ на вопрос е) — «нет»).

Сумма диагональных элементов матрицы P (или след матрицы P) равна сумме ее собственных чисел. Так как P является проектором ранга 2, то у P собственное число 1 имеет кратность 2, и собственное число 0 имеет кратность 2. Следовательно, $\operatorname{tr} P = 2$ (ответы на вопросы ж) — «да», з) — «нет»).

Задача 2. Найдем более явно функцию $F(x)$. Пусть $x < 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{nx} + e^{2nx} + e^{3nx}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^x \sqrt[n]{1 + e^{nx} + e^{2nx}} = e^x$. Если $x = 0$, то $f_n(0) = \sqrt[n]{3}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 1$. Таким образом,

$$M_1 = (-\infty, 1] \text{ и } F(x) = ax + be^x,\ x \in M_1. \tag{1}$$

Пусть $0 < x < 1$. Тогда $0 < e^{x-1} < 1$. По формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии получаем: $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \dfrac{1-x}{1-e^{x-1}}$. Следовательно,

$$M_2 = (0, 1) \text{ и } F(x) = \frac{1-x}{1-e^{x-1}},\ x \in M_2. \tag{2}$$

Наконец, $h(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n-1)!} = x \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{x^m}{m!} = xe^x$ при любом x. Значит,

$$M_3 = [1, +\infty) \text{ и } F(x) = c + dxe^x,\ x \in M_3. \tag{3}$$

Следовательно, на вопрос а) ответ «да».

Из (2) вытекает, что $F(x)$ непрерывна на M_2 и $F(0+) = \dfrac{e}{e-1} > F(1-) = 1$. Значит, на вопрос б) ответ «нет».

В силу (1) $F(0) = F(0-) = b$, $F'(0-) = a + b$, а в силу (2)

$$F(0+) = \frac{e}{e-1},\ F'(x) = \frac{2e^{x-1} - xe^{x-1} - 1}{(1-e^{x-1})^2},\ x \in M_2 \tag{4}$$

и

$$\lim_{x\to 0+} F'(x) = \frac{2e - e^2}{(e-1)^2}.$$

Поэтому если числа a, b выбраны так, что выполняются равенства

$$b = \frac{e}{e-1},\ a + b = \frac{2e-e^2}{(e-1)^2}, \tag{5}$$

то соответствующая функция $F(x)$ дифференцируема в точке 0, а значит и на множестве $M_1 \cup M_2$. Нетрудно проверить, что решение системы (5) есть

$$a = \frac{3e}{(e-1)^2},\ b = \frac{e}{e-1}.$$

Ответ на вопрос в) — «да».

Применяя, например, правило Лопиталя, в силу (4) получаем $\lim\limits_{x\to 1-} F'(x) = -1/2$. Ответ на вопрос г) — «да».

Из (1) следует, что если $a \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to -\infty} (F(x) - ax) = 0$ при любых b, c, d, значит у графика есть наклонная асимптота. Ответ на вопрос д) — «да».

При $c = 0$ в силу (3) $F(1) = F(1+) = de$, а из (2) вытекает, что $F(1-) = 1$. Поэтому для непрерывности функции $F(x)$ на множестве $M_2 \cup M_3$ необходимо и достаточно, чтобы $d = 1/e$. Но функция $F(x) = xe^{x-1}$ на множестве M_3 возрастает, и точка $x = 1$ не является точкой ее локального максимума. Ответ на вопрос е) — «нет».

Имеем $F(1-) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1-} F'(x) = -1/2$, $F(1) = F(1+) = c + de$, $F'(1+) = 2de$. Поэтому для дифференцируемости $F(x)$ в точке 1 необходимо и достаточно выполнения равенств

$$c + de = 1,\ 2de = -1/2. \tag{6}$$

Решением системы (6) являются числа $c = 5/4$, $d = -1/4e$. Ответ на вопрос ж) — «да».

Выше было установлено, что при любых a, b, c, d функция $F(x)$ в каждой точке x имеет конечные односторонние пределы. Ответ на вопрос з) — «нет».

Задача 3. Заметим, что множество M является объединением прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 = 1$. Исследуем поведение функции на каждом из этих множеств.

Прямая: выразим y через x как $y = -x$ и подставим в функцию $f(x, y)$. Получим $f(x, y(x)) = e^{-5x^2}$. Эта функция имеет единственную точку локального максимума $x = 0$ и при $x \to \pm\infty$ стремится к 0. Соответственно, функция $f(x, y)$ на прямой $x + y = 0$ имеет единственную точку локального максимума $x = y = 0$ (в которой $f(0, 0) = 1$) и стремится к 0 при $x, y \to \infty$.

Окружность: выразим y^2 через x как $y^2 = 1 - x^2$ и подставим в функцию $f(x, y)$. Получим $f(x, y(x)) = e^{-(3x^2+2y^2)} = e^{-(3x^2+2(1-x^2))} = e^{-(2+x^2)}$. Рассмотрим эту функцию на отрезке $[-1, 1]$. Она имеет единственную точку локального максимума $x = 0$ и две точки локального минимума $x = \pm 1$. Соответственно, функция $f(x, y)$ на окружности $x^2+y^2 = 1$ имеет две точки локального максимума $x = 0$, $y = \pm 1$ (в которых значение $f(x, y)$ равно e^{-2}) и две точки локального минимума $x = \pm 1$, $y = 0$ (в которых значение $f(x, y)$ равно e^{-3}).

Заметим, что прямая и окружность пересекаются в точках $\left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$ и $\left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$, не являющихся критическими точками ни для одного из множеств, значит все рассмотренные точки локального экстремума являются таковыми и для всего множества M.

Таким образом, ответы на вопросы а) — «нет», б) — «нет», в) — «да» (нижняя грань равна 0 и не достигается), г) — «да», д) — «нет», е) — «нет» (наибольшее значение равно 1 и достигается в точке $x = y = 0$), ж) — «да», з) — «да».

Задача 4. (а–б) Верно: при $x < y < 0$ имеем $(x-y)^3 < 0$, так что $f(x)-f(y) \leqslant (x-y)^3 < 0$, и следовательно $f(x) < f(y)$ — строго возрастает, в частности, монотонна;

(в) Верно: следует из цепочки неравенств, справедливой при $x < y < 0$:

$$\begin{aligned}3xy \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 \geqslant x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow&\\ \Rightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) \leqslant (x-y)(x^2 - 2xy + y^2) \Leftrightarrow&\\ \Leftrightarrow x^3 - y^3 \leqslant (x-y)^3,&\end{aligned}$$

что и требовалось доказать (при домножении на отрицательное число $(x - y)$ знак неравенства меняется);

(г) Неверно, например для $x = -1$, $y = 1$. В этом случае

$$f(x) - f(y) = x^3 - y^3 = (-1) - 1 = -2 > -8 = ((-1) - 1)^3 = (x - y)^3.$$

Задача 5. Докажем вспомогательное утверждение: функция удовлетворяет соотношению из условия задачи тогда и только тогда, когда она является невозрастающей.

Если $f(x)$ нигде не возрастает, то при любых $x > y$ имеем $f(x) - f(y) \leqslant 0 < (x - y)^3$.

Обратно, предположим, что функция удовлетворяет этому соотношению, и покажем, что для любых x, y таких, что $x > y$, должно быть $f(x) \leqslant f(y)$.

Для этого рассмотрим любое N, и разобьём отрезок $[x, y]$ на N равных частей, обозначив точки деления за $x = x_0, x_1, \ldots, x_N = y$. Выпишем цепочку тождеств и неравенств:

$$\begin{aligned}f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^{N} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) \leqslant&\\ \leqslant \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1})^3 = N\left(\frac{x-y}{N}\right)^3 = \frac{(x-y)^3}{N^2}.&\end{aligned}$$

В силу произвольности N, правая часть может быть сделана сколь угодно близкой к нулю, а левая часть от N не зависит. Это означает, что левая часть не может быть положительной.

Теперь по пунктам:

(а) нет, не обязательно. Например, $f(x) = -[x]$, где $[x]$ обозначает целую часть числа, является разрывной, но невозрастающей, и поэтому удовлетворяет требованию;

(б) не обязательно, например это неверно для $f(x) = -x$;

(в) верно, так как для невозрастающей функции при любых $x > y$ имеем $f(x) - f(y) \leqslant \leqslant 0 < (x-y)^2$;

(г) верно. В самом деле, по предыдущей задаче, такая функция является строго возрастающей при $x < 0$, а по условию этой задачи она нигде не возрастает. Полученное противоречие показывает, что такой функции существовать не может.

Задача 6. Исходное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Решая его стандартным образом, поучаем общее решение $y^2 = \sin x + C$, где C — произвольная постоянная. Учитывая начальное условие, получаем, что в окрестности точки $x = 0$ решение совпадает с функцией $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$. Поскольку $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = = 0$, то решение не может быть продолжено за интервал $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Таким образом, максимальное решение исходной задачи Коши — это функция

$$y(x) = \sqrt{1 + \sin x},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Соответственно,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x}},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Ясно, что $\lim\limits_{x \to -\pi/2} g(x) = \lim\limits_{x \to 3\pi/2} g(x) = +\infty$.

Отсюда сразу следуют ответы: а) — «нет», б) — «да», в) — «да», г) — «нет», д) — «нет», е) — «да»

Нетрудно проверить, что функция $g(x)$ на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ убывает от $+\infty$ до $1/\sqrt{2}$, а на промежутке $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ возрастает от $1/\sqrt{2}$ до $+\infty$. Поэтому при любом $\delta > 0$ число решений уравнения $g(x) = \delta$ не превосходит 2. Ответ на вопрос ж) — «нет».

При $\delta = 1$ каждое из уравнений $y(x) = 1$ и $g(x) = 1$ имеют два решения $x = 0$ и $x = \pi$. На самом деле, элементарный анализ функций $y(x)$, $g(x)$ показывает, что при $\delta \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ каждое уравнение $y(x) = \delta$, $g(x) = \delta$ имеет два решения. Ответ на вопрос з) — «да».

10 Вступительный экзамен 2009 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

10.1 Тест

10.1.1 Первая часть теста

1. Дана задача Коши $y' = -xy^3$, $y(-1) = -1$. Предел максимального (непродолжаемого) решения $y(x)$ при $x \to +\infty$ равен

A -1

B 0

C $+\infty$

D решение продолжается до $+\infty$, и предел не существует

E решение не продолжается до $+\infty$

2. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = e^{-y/x} + \dfrac{y}{x}$, $y(e) = 0$, определено на множестве

A $(2, +\infty)$

B $(1, +\infty)$

C $(0, +\infty)$

D $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

E $(-\infty, +\infty)$

3. Значение максимального (непродолжаемого) решения задачи Коши $y' = -y^2 \cos x$, $y(0) = 1/2$, в точке $x = \pi/2$ равно

A $-1/2$

B $-1/3$

C 0

D $1/3$

E $1/2$

4. Функция $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ на множестве $\{(x, y)\colon 4x^2 + y^2 = 4\}$

A достигает наименьшего значения ровно в одной точке

B достигает наименьшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения ровно в трех точках

D достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

E не достигает наименьшего и наибольшего значений

5. Функция $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$ на множестве $\{(x, y)\colon y^2 - x^2 = 1\}$

A достигает наибольшего значения в единственной точке

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C достигает наименьшего значения в единственной точке

D достигает наименьшего значения ровно в двух точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Пусть f — функция, непрерывная на $(0, 1)$, и $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\colon x \in (0, 1), y = f(x)\}$ — ее график. Тогда

A $\quad \Gamma$ — замкнутое множество

B $\quad \Gamma$ — открытое множество

C $\quad \Gamma$ — счетное множество

D $\quad \Gamma$ — множество мощности континуума

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Пусть A — подмножество $\mathbf{R}$, все точки которого являются его предельными точками. Тогда

A $\quad A$ — пустое множество

B $\quad A$ — конечное множество

C $\quad A$ — счетное множество

D $\quad A$ — множество мощности континуума

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Пусть A — подмножество $\mathbf{R}$, множество предельных точек которого пустое. Тогда

A $\quad$ множество A — пустое

B $\quad$ множество граничных точек A — пустое

C $\quad$ множество внутренних точек A — пустое

D $\quad$ множество внешних точек A — пустое

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть A и B — несовпадающие подмножества $\mathbf{R}$, и пусть их пересечение — непустое замкнутое множество. Тогда

A $\quad A$ и B замкнутые

B $\quad$ по крайней мере одно из множеств A или B не замкнутое

C $\quad A$ и B открытые

D $\quad$ по крайней мере одно из множеств A или B не открытое

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. В пространстве $\mathbf{R}^n$ при $n \geqslant 6$ заданы два подпространства L_1 и L_2 с размерностями n_1 и n_2 соответственно, причем $\mathbf{R}^n = L_1 + L_2$. Тогда

A $\quad$ если n нечетное, то $n_1 \neq n_2$

B если сумма подпространств L_1 и L_2 не является прямой, то $n_1 + n_2 < n$

C если $n_1 + n_2 \geqslant n$, то сумма подпространств L_1 и L_2 не является прямой

D если пересечение подпространств L_1 и L_2 не пустое, то их сумма не является прямой

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. У матрицы A размеров $m \times n$, где $m \geqslant 10$ и $n \geqslant 12$, сумма строк нулевая. Тогда

A если $m \leqslant n + 1$, то столбцы матрицы A линейно зависимые

B если $m \geqslant n + 1$, то столбцы матрицы A линейно независимые

C если столбцы матрицы A линейно зависимые, то $m \leqslant n + 1$

D если столбцы матрицы A линейно независимые, то $m \geqslant n + 1$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Пусть A и B — матрицы размеров $m \times n$, где $m \geqslant 10$ и $n \geqslant 12$, a и b — столбцы длины m, а x — искомый столбец длины n. Тогда

A если система $(A + B)x = (a + b)$ не имеет решения, то не имеет решения хотя бы одна из систем $Ax = a$ или $Bx = b$

B если объединенная система $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ не имеет решения, то не имеет решения хотя бы одна из систем $Ax = a$ или $Bx = b$

C если система $(A+B)x = (a+b)$ имеет решение, то имеют решения обе системы $Ax = a$ и $Bx = b$

D если $n = m$ и одна из систем $(AB)x = a$ и $Ax = a$ имеет решение, а другая решения не имеет, то матрица B вырожденная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 10$, а через $\det X$ обозначается определитель любой квадратной матрицы X. Тогда

A если $\det(A - B) \neq 0$, то $\det A \neq \det B$

B если матрицы A и B отличаются друг от друга лишь перестановкой строк, то $\det A = \det B$

C если $\det B \neq 0$ и $\det(AB) = 0$, то $\det A = 0$

D если $\det A \neq 0$ или $\det B \neq 0$, то $\det(AB) \neq 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Пусть A — линейный оператор, действующий из пространства $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 10$. Через $\operatorname{Ker} X$ и $\operatorname{Im} X$ будем обозначать ядро и образ оператора X. Тогда

A если $(\operatorname{Ker} A) + (\operatorname{Im} A) \neq \mathbf{R}^n$, то $(\operatorname{Ker} A) \cap (\operatorname{Im} A) \neq \{0\}$

B если сумма размерностей $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$ больше или равна n, то $(\operatorname{Ker} A) \cap$ $\cap (\operatorname{Im} A) = \{0\}$

C $\operatorname{Ker} A \neq \operatorname{Im} A$

D $\operatorname{Im} A^2 = \operatorname{Im} A$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. Пусть в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 10$, введено стандартное скалярное произведение, и две вещественные квадратные матрицы A и B порядка n рассматриваются как линейные операторы в $\mathbf{R}^n$. Тогда

A если матрица A не задает оператор ортогонального проектирования, то $A^2 \neq$ $\neq A$

B если $A^2 \neq A$, то A не ортогональная матрица

C если A не задает оператор ортогонального проектирования, и ее характеристический многочлен имеет вид $(-1)^n\lambda^k(\lambda-1)^{n-k}$, где k — целое и $0 \leqslant k \leqslant n$, то матрица A не симметричная

D если матрица AB не задает оператор проектирования, то либо A, либо B тоже не задает оператор проектирования

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Пусть A и B — вещественные квадратные матрицы порядка n, причем A симметричная. Тогда

A если для некоторого $x \in \mathbf{R}^n$ оказалось $Ax \neq 0$ и $x^{\mathsf{T}}Ax = 0$, то матрица A вырожденная

B если матрица B ненулевая, то существует $x \in \mathbf{R}^n$, при котором $x^{\mathsf{T}}Bx \neq 0$

C если матрица $B^{\mathsf{T}}AB$ не является положительно определенной, то и матрица A не является положительно определенной

D если матрица B тоже симметричная, и обе матрицы A и B положительно полуопределенные, то квадратичная форма $x^{\mathsf{T}}ABx$ положительно полуопределена

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Линейный оператор A в пространстве $\mathbf{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда число инвариантных подпространств оператора A равно

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

18. Функция $f(x)$ строго убывает на интервале $(0, +\infty)$. Тогда

A у графика функции $f(x)$ есть вертикальная асимптота

B у графика функции $f(x)$ есть горизонтальная асимптота

C если $f(x)$ ограничена снизу, то у графика функции $f(x)$ есть горизонтальная асимптота

D функция $f(x)^2$ является убывающей функцией

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Последовательность $\{a_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$, где $a_n \geqslant 0$, такова, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n}$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости

A равный 2

B не больший, чем 1/2

C не меньший, чем 2

D не меньший, чем 1

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{3n} x^{3n}$ имеют радиусы сходимости 2 и 3, соответственно. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

A имеет радиус сходимости 2

B имеет радиус сходимости 3

C имеет радиус сходимости, не меньший 3

D имеет радиус сходимости, не больший 2

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ ограничена, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда

A ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

B если $a_n \geqslant 0$ при всех n, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

C если $b_n \geqslant 0$ при всех n, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

D если предел последовательности $\{a_n\}$ равен нулю, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Пусть функция $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такова, что функция $f(x)^2$ строго монотонна на всей вещественной прямой. Тогда

A $f(x)$ монотонна

B уравнение $f(x) = 0$ не имеет решений

C $f(x)$ не достигает ни точной нижней, ни точной верхней грани

D $f(x)$ не меняет знак на всей прямой

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Пусть $a_0 = a \in \mathbf{R}$, и далее рекуррентно, пока возможно, определяется $a_n = \ln a_{n-1}$ для $n \geqslant 1$. Тогда

A при любом достаточно большом a число a_n определено для всех n, и последовательность $\{a_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ монотонна

B при любом достаточно большом a число a_n определено для всех n, и последовательность $\{a_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ имеет предел

C при всех a, при которых число a_n определено для всех n, последовательность $\{a_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ имеет предел

D существует такое N, что число a_N не определено ни при каком a

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24. Дана последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$. Тогда

A	если для любого $n > 0$ выполняется равенство $a_{2n} = a_n$, то последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ постоянна

B	если для любого $n > 0$ выполняется равенство $a_{2n} = a_n$, то последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится

C	если для любого $k > 1$ последовательность $\{a_{kn}, n = 1, 2, \dots\}$ сходится, то $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится

D	если для любых $n, k > 0$ выполняется равенство $a_{kn} = a_n$, то последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Пусть множество предельных точек последовательности $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ содержит все рациональные числа. Найдите ***ложное*** утверждение

A	множество предельных точек последовательности $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ совпадает с множеством всех вещественных чисел

B	любая последовательность, осуществляющая взаимно-однозначное соответствие между множеством натуральных и рациональных чисел, обладает указанным свойством

C	последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ принимает все рациональные значения

D	последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ немонотонна

E	среди утверждений A, B, C, D есть ложные.

26. У множества $M \in \mathbf{R}$ существуют изолированные точки и существуют неизолированные точки. Тогда

A	множество M неограниченное

B	множество M замкнутое

C	множество M не является открытым

D	множество M конечное

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

27. Дано множество $M = \{(x, y) \colon y^2 = e^{-x^2}\}$ и функция $f(x, y) = e^{-x^2 - y}$. Тогда

A	функция $f(x, y)$ не ограничена на множестве M

B	функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M

C	точка $(0, -1)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M

D точка $(0, 1)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

28. Функция $f(x)$ задана на вещественной прямой и имеет конечную производную в точке x_0. Тогда

A существует окрестность точки x_0, такая что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на ней

B если $f'(x_0) > 0$, то существует окрестность точки x_0, такая что функция $f(x)$ убывает на ней

C существует окрестность точки x_0, такая что функция $f(x)$ ограничена на ней

D существует окрестность точки x_0, такая что уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет конечное множество решений в ней

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

29. Пусть $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность, и пусть $y_n = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$, $n \geqslant 1$. Тогда

A если последовательность $\{y_n, n = 1, 2, \dots\}$ ограниченная, то последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ также ограниченная

B если последовательность $\{y_n, n = 1, 2, \dots\}$ неограниченная, то последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ также неограниченная

C если последовательность $\{y_n, n = 1, 2, \dots\}$ имеет предел, то последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ также имеет предел

D множества предельных точек последовательностей $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ и $\{y_n, n = 1, 2, \dots\}$ совпадают

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2x^n - x^{2n})$. Обозначим через M множество тех x, для которых этот ряд сходится, и для $x \in M$ положим $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(2x^n - x^{2n})$. Тогда

A множество M замкнуто

B функция $f(x)$ на множестве M ограничена

C ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2x^n - x^{2n})$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на интервале $(0, 1)$

D ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2x^n - x^{2n})$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на интервале $(-1, 0)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. Кривая на плоскости xOy задана уравнением $2x^2 + 3y^2 = 5$. Через точку $(1, 1)$ проведена касательная к этой кривой. Площадь треугольника, образованного отрезками, отсекаемыми касательной на осях координат, и отрезком касательной, заключенным между осями координат, равна

A 25/12

B 20/3

C 21/16

D 26/15

E другому числу, отличному от указанных в A, B, C, D

32. Функция $f(x)$ непрерывна на $[1, +\infty)$ и непрерывно дифференцируема на $(1, +\infty)$. Найдите ***ложное*** утверждение.

A если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[1, +\infty)$

B если график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = a + bx$, $b \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = b$

C если существует $a > 1$, такое что производная $f'(x)$ ограничена на $(a, +\infty)$, то функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[1, +\infty)$

D если функция $f(x)$ не убывает на $[1, +\infty)$, и $|f'(x)| \leqslant \dfrac{C}{x^2}$ при любом $x \in [1, +\infty)$, где C — некоторая константа, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложные

33. Задана функциональная последовательность $f_n(x) = \dfrac{x^3}{n(1 + x^2)}$, $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим через M множество тех x, для которых существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, и для $x \in M$ положим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда

A функция $f(x)$ является неограниченной на M функцией

B множество M ограничено

C последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на множестве M

D функция $f(x)$ является четной функцией

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

34. Интеграл $\int_0^1 xe^{-x}dx$ равен

A $1-2/e$

B $1-1/e$

C $1+1/e$

D $1+2/e$

E другому числу, отличному от указанных в A, B, C, D

35. Интеграл $\int_0^{\pi/2}(\sin^2 x+\sin x+1)dx$ равен

A $3\pi/4-1$

B $3\pi/4$

C $3\pi/4+1$

D $9\pi^2/32+1$

E другому числу, отличному от указанных в A, B, C, D

36. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{20}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{x^{20}}$ равен

A 0

B $\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{20}$

C 1

D $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{20}$

E другому числу, отличному от указанных в A, B, C, D

37. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{e^{2x}-1}$ равен

A 0

B $1/2$

C 1

D 2

E другому числу, отличному от указанных в A, B, C, D

38. Числовая последовательность $\{a_n, n=1,2,\ldots\}$ задана формулами $a_1=2$, $a_{n+1}=1-1/a_n$, $n\geqslant 1$. Тогда предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ равен

A $-(1+\sqrt{5})/2$

B $(1-\sqrt{5})/2$

C $(\sqrt{5}-1)/2$

D $(\sqrt{5}+1)/2$

E не существует

39. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x\cos x}{x(1-\cos x)}$ равен

A 0

B $3/4$

C 1

D $4/3$

E не существует

40. Неопределенный интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x\cdot\ldots\cdot\underbrace{\ln\ldots\ln x}_{n\text{ раз}}}$ равен

A $\underbrace{\ln\ldots\ln x}_{n-1\text{ раз}}+C$

B $\underbrace{\ln\ldots\ln x}_{n\text{ раз}}+C$

C $\underbrace{\ln\ldots\ln x}_{n+1\text{ раз}}+C$

D $\underbrace{\ln\ldots\ln x}_{n+2\text{ раза}}+C$

E не существует ни при каких x

10.1.2 Вторая часть теста

1. Даны функция $f(x, y) = x^2(2x + 3)$ и множество $M = \{(x, y)\colon (x^2 - 2x + y^2)(x^2 + 2x + y^2) = 0\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в одной точке;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

в) наименьшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M равно 0;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в одной точке;

Да Нет

д) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

е) наибольшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M равно 1;

Да Нет

ж) точка $(0, 0)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) точка $(-1, -1)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

Да Нет

2. Система уравнений $Bx = 0$, где $x \in \mathbf{R}^4$, имеет в качестве множества решений двумерное подпространство. Известно также, что матрица BB^T невырожденная, а матрица $A = B^TB$ задает проектор в $\mathbf{R}^4$. Тогда

а) матрица BB^T единичная;

Да Нет

б) образ матрицы B^T имеет размерность 2;

Да Нет

в) матрица A имеет ранг 3;

Да Нет

г) характеристический многочлен матрицы A имеет вид $p(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda)^2$;

Да Нет

д) образы матриц B^T и A совпадают;

Да Нет

е) ядра матриц B и A совпадают;

Да Нет

ж) образ матрицы B^T и ядро матрицы B разлагают пространство $\mathbf{R}^4$ в прямую сумму;

Да Нет

з) матрица A не является ортогональной матрицей.

Да Нет

3. Две непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на вещественной прямой и таковы, что $f(x)$ строго убывает на всей прямой, а $g(x)$ строго возрастает на всей прямой. Тогда

а) если функция $f(x) + g(x) = \text{const}$, то функция $f(x)g(x)$ монотонна;

Да Нет

б) если функция $f(x) + g(x) = \text{const}$, то функция $f(x)g(x)$ немонотонна;

Да Нет

в) если функция $f(x)g(x)$ периодична и $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то $g(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$;

Да Нет

г) если функция $f(x) + g(x)$ периодична и $g(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$;

Да Нет

д) если функция $f(x) + g(x)$ периодична и $g(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то $f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$;

Да Нет

е) если функция $f(x)g(x)$ периодична, то она нигде не обращается в ноль;

Да Нет

ж) если функция $f(x) + g(x) = \mathrm{const}$, а функция $f(x)g(x)$ монотонна, то функция $f(x)^2 + g(x)^2$ монотонна;

Да Нет

з) если функция $f(x) + g(x) = \mathrm{const}$, то функция $f(x)g(x)$ непериодична.

Да Нет

4. Дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\ln x}{n}\right)^k - 1}{n^\beta},$$

где k — положительное целое число, β — вещественное число. Обозначим через M множество тех x, при которых ряд сходится, и для $x \in M$ обозначим через $S(x)$ сумму этого ряда. Тогда

а) при любых $\beta \geqslant 0$ и целых $k > 0$ множество M непустое и открытое;

Да Нет

б) при $k = 2$, $\beta = 2$ множество M непустое, и функция $S(x)$ ограничена на любом ограниченном подмножестве множества M;

Да Нет

в) функция $S(x)$ при любых $\beta > 0$ и целом $k > 0$ непрерывна на множестве M;

Да Нет

г) при $k = 3$, $\beta = 3$ уравнение $S(x) = 3$ имеет решение;

Да Нет

д) при любых $\beta \geqslant 1$ и целом $k > 0$ ряд сходится равномерно на любом ограниченном подмножестве множества M;

Да Нет

е) при любых $\beta \geqslant 0$ и целом $k > 0$ ряд сходится равномерно на любом компактном подмножестве множества M;

Да Нет

ж) существуют числа $\beta > 1$ и целое $k > 0$, такие что график функции $S(x)$ имеет горизонтальную асимптоту;

Да Нет

з) существуют числа $\beta > 1$ и целое $k > 0$, такие что график функции $S(x)$ имеет наклонную (причем не горизонтальную) асимптоту.

Да Нет

5. Пусть $y(x)$ есть максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$y' = \frac{y}{x} + x \sin x, \quad y(\pi) = 1.$$

Обозначим через M область определения функции $f(x) = \dfrac{y(x)}{x}$. Тогда

а) область определения функции $y(x)$ есть интервал $(0, +\infty)$;

Да Нет

б) график функции $y(x)$ имеет наклонную асимптоту;

Да Нет

в) функция $f(x)$ неотрицательна на множестве M;

Да Нет

г) функция $f(x)$ неположительна на множестве M;

Да Нет

д) существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, где $a = \inf M$;

Да Нет

е) существует конечный предел $\lim\limits_{x \to b} f(x)$, где $b = \sup M$;

Да Нет

ж) функция $f(x)$ является ограниченной;

Да Нет

з) уравнение $y(x) = cx$ имеет решения при любом $c > 0$.

Да Нет

10.2 Ответы и решения теста

10.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. E. **2.** B. **3.** D. **4.** B. **5.** C. **6.** D. **7.** E. **8.** C. **9.** D. **10.** E. **11.** D. **12.** D. **13.** C. **14.** A. **15.** C. **16.** E. **17.** E. **18.** C. **19.** D. **20.** D. **21.** C. **22.** B. **23.** C. **24.** D. **25.** C. **26.** C. **27.** D. **28.** C. **29.** B. **30.** E. **31.** A. **32.** B. **33.** D. **34.** A. **35.** C. **36.** D. **37.** A. **38.** E. **39.** D. **40.** C.

10.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Заметим, что $(x^2-2x+y^2)(x^2+2x+y^2) = ((x-1)^2+y^2-1)((x+1)^2+y^2-1)$, откуда следует, что множество M есть объединение двух окружностей радиуса 1 — одна с центром в точке $(1,0)$, другая с центром в точке $(-1,0)$. А значит проекция множества M на прямую Ox есть отрезок $[-2,2]$. Так как функция $f(x,y)$ зависит только от переменной x, то достаточно исследовать ее на экстремумы на отрезке $[-2,2]$.

Производная $(x^2(2x+3))' = 2x(2x+3)+2x^2 = 6x(x+1)$. Ее корни -1 и 0 лежат внутри отрезка $[-2,2]$. Вторая производная равна $(x^2(2x+3))'' = 12x+6$. В точке $x=-1$ она отрицательная ($x=-1$ — точка локального максимума), в точке $x=0$ — положительная ($x=0$ — точка локального минимума). Значения функции в точках $x=0$ и $x=-1$ равны 0 и 1 соответственно.

В точках $x=-2$ и $x=2$ (на концах отрезка) значения функции равны -4 и 28. Таким образом, в точке $x=-2$ достигается наименьшее, а в точке $x=2$ — наибольшее значение фунции $x^2(2x+3)$ на отрезке $[-2,2]$.

Вернемся к поведению функции $f(x,y)$ на множестве M. Точкам $x=-2$, $x=0$ и $x=2$ соответствуют точки $(-2,0)$, $(0,0)$ и $(2,0)$ множества M. Точке $x=-1$ же соответствует две точки множества M — $(-1,1)$ и $(-1,-1)$.

Отсюда следует, что функция $f(x,y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в одной точке $(-2,0)$, и это значение равно -4 (ответы на вопросы а) — «да», б) — «нет», в) — «нет»). Функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в точке $(2,0)$, и это значение равно 28 (ответы на вопросы г) — «да», д) — «нет», е) — «нет»). Точки $(0,0)$ и $(-1,-1)$ действительно являются точками локального минимума и максимума соответственно (ответы на вопросы ж) — «да», з) — «да»).

Задача 2. Так как матрица A задает пректор, то $A^2 = A$, то есть $B^TBB^TB = B^TB$. Если это равенство умножить слева на B, а справа на B^T, то получим $(BB^T)^3 = (BB^T)^2$. Так как BB^T невырожденная матрица, то $BB^T = I$ (ответ на вопрос а) — «да»). Так как система $Bx = 0$ в $\mathbf{R}^4$ имеет двумерное множество решений, то ранг матрицы B, а следовательно и матрицы B^T, равен двум (ответ на вопрос б) — «да»). Если $Bx = 0$, то $Ax = B^TBx = 0$. Наоборот, если $Ax = B^TBx = 0$, то $BB^TBx = 0$, то есть $Bx = 0$. Таким образом, ядра матриц B и A совпадают (ответ на вопрос е) — «да»). Поэтому ранг матрицы A равен $4-2=2$ (ответ на вопрос в) — «нет»). Так как матрица A имеет ранг 2 и является проектором, то число 0 для нее является собственным числом кратности 2, и число 1 — собственным числом кратности тоже 2 (ответ на вопрос г) — «да»). Поскольку $A = B^TB$, то образ матрицы A содержится в образе матрицы B^T, а так как их ранги совпадают, то есть совпадают размерности образов, то совпадают и сами образы (ответ на вопрос д) — «да»). Образ марицы B^T и ядро матрицы B совпадает с образом и ядром матрицы A соответственно. Так как матрица A задает проектор, то ее образ и ядро разлагают $\mathbf{R}^4$ в прямую сумму (ответ на вопрос ж) — «да»). Матрица A не является ортогональной матрицей, так как она вырожденная: ее ранг (два) меньше ее порядка (четыре) (ответ на вопрос з) — «да»).

Задача 3. Если существует такое C, что при любом вещественном x мы имеем $f(x) + g(x) = C$, то $g(x) = C - f(x)$ и тогда $f(x)g(x) = f(x)\,(C - f(x))$ заведомо достигает максимума, если существует такое x, что $f(x) = g(x) = C/2$, и тогда она немонотонна. Например, $f(x) = 1 - e^x$, $g(x) = e^x$.

Однако может быть и так, что произведение $f(x)g(x)$ является монотонной функцией ($f(x) = C/2 - e^x$, $g(x) = C/2 + e^x$). Итого, в пунктах а) и б) ответ «нет».

Далее, $f(x)^2 + g(x)^2 = (f(x) + g(x))^2 - 2f(x)g(x) = C^2 - 2f(x)g(x)$ и является монотонной функцией, если функция $f(x)g(x)$ монотонна — в пункте ж) ответ «да».

Если функция $f(x)g(x)$ периодична, то она нигде не обращается в ноль — в пункте е) ответ «да». В самом деле, если она где-то равна нулю, то она равна нулю в бесконечном количестве точек. Но каждый ноль функции $f(x)g(x)$ — это ноль одной из функций $f(x)$ или $g(x)$. Каждая из них, однако, в силу строгой монотонности, может обращаться в ноль не более, чем в одной точке.

Теперь по пункту в). Пусть снова функция $f(x)g(x)$ периодична, и пусть $f(0)g(0) = C \neq 0$. Если длина периода равна T, то при любом натуральном k имеем $f(kT)g(kT) = C$. Последовательность $a_k = f(kT)$ сходится к нулю вместе с функцией $f(x)$ по условию. Значит, последовательность $b_k = g(kT)$ такова, что $b_k \to +\infty$. Но функция $g(x)$ (строго) возрастает, поэтому $g(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ — в пункте в) ответ «да».

Переходя к пунктам г), д), допустим, что функция $f(x) + g(x)$ периодична с периодом T. Тогда она ограничена. Действительно, она непрерывна, следовательно достигает минимума и максимума на (любом) отрезке длины T. Эти минимум и максимум являются глобальными. Тогда, конечно, если $g(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то $f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$ — в пункте г) ответ «нет», в пункте д) ответ «да».

Наконец, докажем, что в пункте з) ответ «да». Действительно, если $f(x) + g(x) = C$, то $f(x)g(x) = f(x)\,(C - f(x))$ не может быть периодичной: в силу строгой монотонности функции $f(x)$, уравнение $f(x)\,(C - f(x)) = \mathrm{const}$ имеет не более двух решений, а периодичная функция любое значение принимает бесконечное число раз.

Задача 4. Применяя бином Ньютона, получаем:

$$\frac{\left(1 + \dfrac{\ln x}{n}\right)^k - 1}{n^\beta} = \frac{k \ln x}{n^{1+\beta}} + \frac{k(k-1)}{2}\frac{(\ln x)^2}{n^{2+\beta}} + \ldots + \frac{(\ln x)^k}{n^{k+\beta}}. \tag{1}$$

Следовательно, в силу интегрального признака Коши получаем, что при любых $k > 0$, $\beta > 0$ ряд сходится в каждой точке $x > 0$, поскольку каждое слагаемое в правой части (1) является членом сходящегося ряда. При $\beta = 0$ для любого $k > 0$ ряд расходится в каждой точке $x > 0$, $x \neq 1$, так как первое слагаемое в правой части (1) является с точностью до константы членом гармонического ряда, а остальные слагаемые являются членами сходящихся рядов.

При $x = 1$ ряд, очевидно, сходится при любых k, β. Таким образом, $M = (0, +\infty)$ при $k > 0$, $\beta > 0$. При $k > 0$ и $\beta = 0$ имеем $M = \{1\}$ — замкнутое множество. Поэтому на вопрос а) ответ «нет».

Если $k > 0$, $\beta > 0$, то в силу (1) функция $S(x)$ может быть представлена в виде

$$S(x) = c_1^{(k)} \ln x + c_2^{(k)} (\ln x)^2 + \ldots + c_k^{(k)} (\ln x)^k, \tag{2}$$

где $c_1^{(k)}, \ldots, c_k^{(k)} > 0$. Отсюда легко следует, что

$$\lim_{x \to +0} |S(x)| = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} |S(x)| = +\infty. \tag{3}$$

Поэтому на вопрос б) ответ «нет», так как функция $S(x)$ при $k = 2$, $\beta = 2$ в силу (3) не ограничена, например, на интервале $(0, 1)$.

В силу (2) при $\beta > 0$ функция $S(x)$ непрерывна на M. Значит, на вопрос в) ответ «да».

Так как $S(1) = 0$, то в силу непрерывности $S(x)$ и (3) получаем ответ «да» на вопрос г).

Из (1) и из признака Вейерштрасса легко следует, что при $k > 0$, $\beta > 0$ на любом отрезке $[a, b] \subset (0, +\infty)$ ряд сходится равномерно. Напомним также, что $M = \{1\}$ при $\beta = 0$. Поэтому на вопрос е) ответ «да».

В силу (3) ответ на вопрос ж) «нет».

Из (2) вытекает что $S(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$ в силу известных свойств функции $\ln x$. Поэтому на вопрос з) ответ «нет».

Возьмем $k = 1$, $\beta = 1$. Тогда $S(x) = \ln x \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = C \ln x$ (на самом деле, $C = \dfrac{\pi^2}{6}$). Обозначим $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$, $S_n(x) = \ln x \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} = C_n \ln x$. Тогда $|S_n(x) - S(x)| = |\ln x| \cdot |C_n - C|$, откуда следует, что на интервале $(0, 1)$ сходимость не является равномерной. Ответ на вопрос д) «нет».

Задача 5. Данное дифференциальное уравнение является линейным, поэтому решим его с помощью метода вариации постоянной. Общее решение однородного уравнения $y' = y/x$ равно Cx. Теперь ищем частное решение неоднородного уравнения в виде $C(x)x$:

$$(C(x)x)' = C'(x)x + C(x) = \frac{C(x)x}{x} + x \sin x.$$

Сократив $C(x)$ в левой и правой частях уравнения, получаем:

$$C'(x) = \sin x,$$

откуда $C(x) = -\cos x$, и частное решение исходного уравнения $-x \cos x$. Общее решение неоднородного уравнения равно $x(C - \cos x)$. Подставив начальное условие $y(\pi) = 1$, получим $C = 1/\pi - 1$ и решение $y(x) = x\,(1/\pi - 1 - \cos x)$. Заметим, что несмотря на то, что эта формула имеет смысл для всех вещественных x, решение не продолжается через прямую $x = 0$, так как на этой прямой правая часть уравнения не определена. Таким образом, максимальное решение задачи Коши $y(x) = x\,(1/\pi - 1 - \cos x)$ определено при $x \in (0, +\infty)$ (ответ на вопрос а) — «да»).

Так как предел отношения $y(x)/x = 1/\pi - 1 - \cos x$ при $x \to +\infty$ не существует, то наклонной асимптоты график функции $y(x)$ не имеет (ответ на вопрос б) — «нет»). Заметим, что так как при всех $x > 0$ выполняется неравенство $1/\pi - 1 - \cos x \leqslant 1/\pi$, то при $c > 1/\pi$ уравнение $y(x) = cx$ не имеет решения (ответ на вопрос з) — «нет»).

Рассмотрим функцию $f(x) = y(x)/x = 1/\pi - 1 - \cos x$. Она определена там же, где и $y(x)$ — на $(0, +\infty)$. Заметим, что $-1 < 1/\pi - 1 < 1$, откуда следует, что $f(\pi) > 0$, а $f(2\pi) < 0$ (ответы на вопросы в) — «нет», г) — «нет»). Нижняя грань множества M равна $\inf M = 0$, предел $\lim\limits_{x\to 0}(1/\pi - 1 - \cos x)$ существует и равен $1/\pi - 2$ (ответ на вопрос д) — «да»). Верхняя грань множества M равна $\sup M = +\infty$, предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(1/\pi - 1 - \cos x)$ не существует (ответ на вопрос е) — «нет»). Так как функция $\cos x$ ограничена, то и $f(x)$ ограничена (ответ на вопрос ж) — «да»).

11 Вступительный экзамен 2010 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

11.1 Тест

11.1.1 Первая часть теста

1. Дана функция двух переменных $f(x, y) = x^2 + y^2$ и множество $M = \{(x, y)\colon \sqrt{|x|} + 2\sqrt{|y|} = 2\}$. Тогда

A функция $f(x, y)$ не ограничена на множестве M

B число локальных минимумов функции $f(x, y)$ на множестве M не больше трех

C число локальных максимумов функции $f(x, y)$ на множестве M не меньше трех

D в точке $(1, 1/4)$ функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Непустое множество $M \subset \mathbf{R}$ замкнуто, и множество его внутренних точек пусто. Тогда

A множество M конечно или счетно

B множество M ограничено

C все точки множества M являются изолированными точками

D все точки множества M являются его граничными точками

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x \ln x)^n}{n}$. Обозначим через M его множество сходимости. Тогда

A множество M неограниченное

B множество M замкнутое

C на множестве M ряд сходится равномерно

D отрезок $[0.1, 0.5]$ содержится в M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Предел $\lim\limits_{x \to \pi/2} \left(\left(\dfrac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x \right)$

A равен 0

B равен 1

C равен 2

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

5. Дана функциональная последовательность $\{f_n(x) = ne^{-n|x|}, x \in \mathbf{R}, n = 1, 2, \ldots\}$. Обозначим через M множество ее сходимости и через $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ при $x \in M$. Тогда

A интервал $(0, 1) \in M$, существует $\int_0^1 f(x)dx$, и $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$

B отрезок $[1, 5] \in M$, и последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится равномерно к $f(x)$ на $[1, 5]$

C $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 (x^3 + 2) f_n(x)dx = 3$

D функция $f(x)$ является неограниченной на M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = \frac{y^2}{x}$, $y(1) = 1/2$. Найдите ***ложное*** утверждение:

A функция $y(x)$ является неограниченной

B $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$

C $\lim\limits_{x\to 0+0} y(x) = 0$

D функция $y(x)$ является возрастающей

E среди утверждений A, B, C, D есть хотя бы одно ложное

7. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ определяется рекуррентно $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

A предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует при любом $x_1 \geqslant 0$ и не зависит от x_1

B существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ является неограниченной

C при любом $x_1 > 0$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ является монотонной

D существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ имеет два различных частичных предела

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n e^{-x\sqrt{n}}$. Обозначим через M множество его сходимости и через $S(x)$ — сумму этого ряда при $x \in M$. Тогда

A M — ограниченное множество

B функция $S(x)$ ограничена на M

C на любом интервале $(a, b) \subset M$ ряд сходится равномерно

D функция $S(x)$ непрерывна на M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. На координатной плоскости даны две окружности $x^2 + y^2 = 1$ и $\left(x - 10\sqrt{2}\right)^2 + \left(y - 10\sqrt{2}\right)^2 = 1$. В момент $t = 0$ радиус каждой окружности начинает увеличиваться со скоростью, пропорциональной ее радиусу. Через одну секунду радиус первой окружности удваивается, а радиус второй окружности увеличивается в четыре раза. Касание окружностей произойдет в момент времени

A $t = 2$ секунды

B $t = 3$ секунды

C $t = \ln 10$ секунд

D $t = \ln 12$ секунд

E t, отличный от перечисленных в A, B, C, D

10. Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[0, +\infty)$ функция и $a > 0$. Тогда интеграл $\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx$

A равен $\frac{1}{3}\int_0^{a^3} x^2 f(x)\,dx$

B равен $2\int_0^{\sqrt{a}} x f(x^2)\,dx$

C равен $\frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x)\,dx$

D равен $\frac{1}{3}\int_0^{\sqrt[3]{a}} x f\left(\sqrt{x}\right)dx$

E не совпадает ни с одним из выражений в A, B, C, D

11. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

A равен 0

B равен 1

C равен 1/2

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

12. Функция $f(x)$ определена на вещественной прямой $\mathbf{R}$. Тогда

A если $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$, то ее график замкнут в $\mathbf{R}^2$

B если $f(x)$ имеет единственную точку разрыва на $\mathbf{R}$, и это устранимый разрыв, то ее график замкнут в $\mathbf{R}^2$

C если $f(x)$ имеет единственную точку разрыва на $\mathbf{R}$, и это разрыв первого рода, то ее график замкнут в $\mathbf{R}^2$

D если $f(x)$ имеет единственную точку разрыва на $\mathbf{R}$, и это разрыв второго рода, то ее график замкнут в $\mathbf{R}^2$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Дано множество $A \subset \mathbf{R}^2$. Обозначим через $X(A) = \{x \in \mathbf{R} \colon \exists y \in \mathbf{R} \colon (x, y) \in A\}$ проекцию множества A на ось Ox. Тогда

A если множество A замкнутое, то множество $X(A)$ тоже замкнутое

B если множество $X(A)$ замкнутое, то множество A тоже замкнутое

C если множество A открытое, то множество $X(A)$ тоже открытое

D если множество $X(A)$ открытое, то множество A тоже открытое

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на $(0, 1)$, и $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x \in (0, 1), y = f(x)\}$ — ее график. Тогда

A Γ — ограниченное множество

B Γ — неограниченное множество

C Γ — открытое множество

D Γ — замкнутое множество

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и интегрируема по Риману на $[a, b]$. Обозначим через $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Тогда

A существует такая $f(x)$, что $F(x)$ имеет разрыв на $[a, b]$

B функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b)

C функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на всем (a, b), кроме, быть может, одной точки

D функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на всем (a, b), кроме, быть может, некоторого конечного множества

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, где $n \geqslant 3$, — система векторов, принадлежащих $\mathbf{R}^N$, где $N \geqslant 3$. Известно, что любые $n - 1$ векторов из X линейно независимые. Тогда

A система X линейно зависимая

B система X линейно независимая

C если система X линейно зависимая, то $n > N$

D если система X линейно независимая, то $n < N$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 3$. Обозначим через $\det A$ определитель матрицы A. Тогда

A если $\det A > 0$, то n четное

B если $\det A < 0$, то n нечетное

C если $\det A > 0$, то $\det(A^{\mathsf{T}}A) > 0$

D если $\det A < 0$, то $\det(A^{\mathsf{T}}A) < 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

18. Пусть A — матрица размера $m \times n$, a — столбец длины m, b — столбец длины n, и x — искомый столбец подходящей длины. Через A^{T} обозначается матрица, транспонированная к A. Тогда

A если система $Ax = a$ имеет не более одного решения при любом a, то система $AA^{\mathsf{T}}x = a$ имеет не более одного решения при любом a

B если система $AA^{\mathsf{T}}x = a$ имеет не более одного решения при любом a, то система $Ax = a$ имеет не более одного решения при любом a

C если система $AA^{\mathsf{T}}x = a$ совместна при любом a, то система $Ax = a$ совместна при любом a

D если система $A^{\mathsf{T}}x = b$ совместна при любом b, то система $AA^{\mathsf{T}}x = a$ совместна при любом a

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Число инвариантных подпространств матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

трактуемой как линейный оператор в $\mathbf{R}^2$, равно

A 1

B 2

C 3

D 4

E бесконечно много

20. Пусть A — матрица $m \times n$, B — матрица $n \times m$ и x, y — столбцы длины n и m соответственно. Тогда

A если существует $y \neq 0$, такой что $ABy = y$, то существует $x \neq 0$, такой что $BAx = x$

B если существует $y \neq 0$, такой что $ABy = y$, то существует $x \neq 0$, такой что $BAx = -x$

C если существует y, такой что $ABy = 0$, то существует $x \neq 0$, такой что $BAx = 0$

D если существует $y \neq 0$, такой что $ABy = 0$, то существует $x \neq 0$, такой что $BAx = 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Линейные операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ являются операторами проектирования в $\mathbf{R}^n$. Тогда

A если $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, то $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ является оператором проектирования

B если $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ является оператором проектирования, то $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

C если $\mathbf{AB} = 0$, то $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ является оператором проектирования

D если $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 0$, то $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ является оператором проектирования

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Пусть A и B — симметричные положительно полуопределенные матрицы порядка $n \geqslant 3$. Обозначим через $\operatorname{rank} A$ ранг матрицы A. Тогда

A если $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \geqslant n$, то матрица $A + B$ положительно определена

B если $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \geqslant n$, то матрица $AB + BA$ положительно определена

C если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = n$, то матрица $A + B$ положительно определена

D если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = n$, то матрица $AB + BA$ положительно определена

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Пусть P — квадратная матрица порядка n, все собственные значения которой равны нулю или единице. Через I обозначим единичную матрицу. Тогда

A $P^2 = P$

B если P невырожденная, то $P = I$

C $(I - P)^{2n} = (I - P)^n$

D количество линейно независимых собственных векторов матрицы P^n не превосходит количества линейно независимых собственных векторов матрицы P

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24. При каком наибольшем значении натурального параметра k максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $\dfrac{dx}{dt} = e^x$, $x(0) = k$ определено в точке $t = 0.1$?

A $\quad 1$

B $\quad 2$

C $\quad 3$

D $\quad 4$

E $\quad 5$

25. Сумма ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

равна

A $\quad 1$

B $\quad 2$

C $\quad 4$

D $\quad 6$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D.

26. Неявная функция $y(x)$ определяется уравнением $\dfrac{1+x^2}{1+y^2} - \ln\dfrac{1+y}{1+x} = 1$. Производная $\dfrac{dy}{dx}$ в точке $(0,0)$

A $\quad$ равна 0

B $\quad$ равна 1

C $\quad$ равна -1

D $\quad$ равна числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E $\quad$ не существует

27. Выберите истинное утверждение (все множества суть подмножества числовой прямой):

A $\quad$ пересечение любого числа непустых компактных множеств является непустым компактным множеством

B $\quad$ объединение конечного числа множеств, каждое из которых является либо открытым, либо замкнутым, является либо открытым, либо замкнутым

C пересечение любого числа дополнений к компактным множествам является дополнением к компактному множеству

D любое компактное множество является пересечением некоторого (возможно, несчетного) числа отрезков

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

28. Выберите ***ложное*** утверждение (все множества суть подмножества числовой прямой):

A если все граничные точки множества не принадлежат ему, то множество является открытым

B точная верхняя грань непустого ограниченного множества является его граничной точкой

C множество граничных точек множества, не являющегося ни открытым, ни замкнутым, само не является ни открытым, ни замкнутым

D если множество не является ни открытым, ни замкнутым, то множество его граничных точек непусто

E среди утверждений A, B, C, D есть хотя бы одно ложное

29. Даны числовые последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$. Тогда

A если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, причем $y_n > 0$, то последовательность $\{z_n = x_n/y_n\}$ сходится

B если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, причем $x_n > 0$, $y_n > 0$, то последовательность $\{z_n = {x_n}^{y_n}\}$ сходится

C если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, а последовательность $\{z_n\}$ такова, что $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, то последовательность $\{z_n\}$ также сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} z_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

D если последовательность $\{x_n^2\}$ сходится, то последовательность $\{x_n\}$ имеет не более двух частичных пределов

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x} - x$ равен

A 0

B 1

C $\sqrt{2}$

D 2

E $+\infty$

31. Сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ равна

A $1/2$

B $1/4$

C $3/2$

D $3/4$

E 1

32. Предел $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$

A равен 1

B равен $\ln 2$

C равен 0

D равен $+\infty$

E не существует

33. Интеграл $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$ равен

A $\ln 2$

B $\ln 3$

C $3\ln 2$

D $2\ln 3$

E $3\ln 3$

34. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением $x_{n+1} = 1/2(x_n + 2/x_n)$; известно, что $x_0 \neq 0$. Тогда

A последовательность $\{x_n\}$ расходится для $x_0 < 0$ и сходится к 1 для $x_0 > 0$

B последовательность $\{x_n\}$ расходится для $x_0 < 0$ и сходится к $\sqrt{2}$ для $x_0 > 0$

C последовательность $\{x_n\}$ сходится к -1 для $x_0 < 0$ и сходится к $\sqrt{2}$ для $x_0 > 0$

D последовательность $\{x_n\}$ сходится к $-\sqrt{2}$ для $x_0 < 0$ и сходится к $\sqrt{2}$ для $x_0 > 0$

E последовательность $\{x_n\}$ расходится для любого $x_0 \neq 0$

35. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n^2} = 0$. Тогда

A $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

B если a_n монотонна, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

C $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n^3} = 0$

D ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости не меньший, чем 1

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Пусть $a_0 = a \geqslant 0$. Последовательность $\{a_n\}$ для $n \geqslant 1$ определяется формулой

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1}^{1/2} & \text{для } n \text{ вида } 3k, \text{ где } k \text{ — целое;} \\ a_{n-1}^{2/3} & \text{для } n \text{ вида } 3k-1, \text{ где } k \text{ — целое;} \\ a_{n-1}^{3} & \text{для } n \text{ вида } 3k+1, \text{ где } k \text{ — целое.} \end{cases}$$

Тогда

A существует a такое, что последовательность $\{a_n\}$ не ограничена

B последовательность $\{a_n\}$ не является монотонной

C если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, то она является постоянной

D предел последовательности $\{a_n\}$ существует только при $a = 1$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

37. Ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ имеют радиусы сходимости 1 и 2, соответственно. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$

A имеет радиус сходимости 2

B имеет радиус сходимости 1

C имеет радиус сходимости не меньший, чем 1

D имеет радиус сходимости, не больший, чем 2

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

38. Функция $f(x)$ определена на вещественной прямой и имеет при $x \to +\infty$ асимптоту, заданную уравнением $y = ax + b$. Тогда радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$

A одинаков при всех $a, b \in \mathbf{R}$

B	равен единице при $a = 0$

C	принимает не более двух различных значений

D	либо равен единице, либо принимает значение, не меньшее 2

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

39. Пусть $a_1 = a \in \mathbf{R}$, и далее для $n > 1$ определяется $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}a_{n-1}\right)$. Тогда предел последовательности $\{a_n\}$

A	не существует при $|a| > \pi$

B	если существует, то равен либо 0, либо 1, либо -1

C	если существует, то равен либо 1, либо -1

D	может принимать бесконечное число значений

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

40. Дано дифференциальное уравнение $y' = y^4$. Тогда при любом начальном условии его максимальное (непродолжаемое) решение

A	определено на ограниченном интервале

B	определено при $x = 0$

C	имеет вертикальную асимптоту

D	не определено при $x = 1$

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11.1.2 Вторая часть теста

1. Функция $f(x)$ задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\left(\dfrac{1+x}{n}\right)\right)^{n^2}, & \text{если } x < -1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\cos\left(\dfrac{x}{n}\right)\right)^{1/n}, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right)^{1/n}, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

а функция $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Тогда

а) функция $f(x)$ определена при всех вещественных x;

Да Нет

б) график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту;

Да Нет

в) функция $f(x)$ достигает наименьшего значения в единственной точке;

Да Нет

г) $f'(1) = 1$;

Да Нет

д) $f'(-1) = 0$;

Да Нет

е) функция $g(x)$ определена при всех вещественных x;

Да Нет

ж) функция $g(x)$ дифференцируема в каждой внутренней точке своей области определения;

Да Нет

з) график функции $g(x)$ имеет наклонную (причем не горизонтальную) асимптоту.

Да Нет

2. Даны функция $f(x, y) = (x-a)^2+y^2$, где $a \in \mathbf{R}$, и множество $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\colon g(x, y) = 0\}$, где $g(x, y) = x^3 - 3x^2 - 4x - y^2$. Тогда

а) множество M является компактным;

Да Нет

б) при любом a функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на M в единственной точке;

Да Нет

в) при любом a функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на M;

Да Нет

г) при любом a функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на M не более, чем в одной точке;

Да Нет

д) при $a = 3$ наибольшее значение функции $f(x, y)$ на M равно $2\sqrt{2}$;

Да Нет

е) при $a = 1$ наименьшее значение функции $f(x, y)$ на M равно 1;

Да Нет

ж) существует a такое, что в любой точке, в которой функция $f(x, y)$ достигает локального минимума на M, выполнено равенство $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$;

Да Нет

з) при любых различных значениях a наименьшие значения функции $f(x, y)$ на M различные.

Да Нет

3. Дана квадратная вещественная матрица A порядка $n \geqslant 6$. Известно, что $A^2 = -I$. Тогда

а) матрица A кососимметричная;

Да Нет

б) матрица A ортогональная;

Да Нет

в) если матрица A кососимметричная, то она ортогональная;

Да Нет

г) если матрица A симметричная, то она ортогональная;

Да Нет

д) пространство $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму ядра и образа матрицы A;

Да Нет

е) у матрицы A существует инвариантное подпространство размерности 1;

Да Нет

ж) у матрицы A существует бесконечно много инвариантных подпространств размерности 2;

Да Нет

з) в $\mathbf{R}^n$ существуют подпространства L_1 и L_2, такие что $A(L_1) \subset L_2$, $A(L_2) \subset L_1$ и $\mathbf{R}^n = L_1 \oplus L_2$.

Да Нет

4. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2(e^{-nx} - e^{-3nx})$. Обозначим через M множество его сходимости, и для $x \in M$ обозначим через $S(x)$ сумму этого ряда. Тогда

а) множество M замкнуто;

Да Нет

б) множество M не ограничено сверху;

Да Нет

в) функция $S(x)$ убывает на M;

Да Нет

г) функция $S(x)$ ограничена на M;

Да Нет

д) функция $S(x)$ непрерывна на M;

Да Нет

е) график функции $S(x)$ имеет асимптоту;

Да Нет

ж) для любого компактного подмножества $K \subset M$ ряд сходится к $S(x)$ равномерно на множестве K;

Да Нет

з) существует некомпактное подмножество $G \subset M$, на котором ряд сходится к $S(x)$ равномерно.

Да Нет

5. Функция $f(x)$ определена на вещественной прямой и периодична, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ имеет радиус сходимости, равный 1. Тогда

а) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2$ сходится;

Да Нет

б) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| f(n)$ сходится;

Да Нет

в) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ сходится;

Да Нет

г) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n f(n) x^n$ имеет радиус сходимости, равный 1;

Да Нет

д) если минимальный период функции $f(x)$ равен $\sqrt{2}$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n f(n) x^n$ имеет радиус сходимости, равный 1;

Да Нет

е) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f(n) x^n$ имеет радиус сходимости, больший 1;

Да Нет

ж) если один из периодов функции $f(x)$ равен 1, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f(n)$ сходится;

Да Нет

з) если минимальный период функции $f(x)$ является целым положительным числом, строго большим 1, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n) x^n$ имеет радиус сходимости, в точности равный 1.

Да Нет

11.2 Ответы и решения теста

11.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. C. **2.** D. **3.** D. **4.** B. **5.** E. **6.** B. **7.** C. **8.** D. **9.** A. **10.** C. **11.** C. **12.** A. **13.** C. **14.** E. **15.** E. **16.** E. **17.** C. **18.** C. **19.** B. **20.** A. **21.** D. **22.** C. **23.** E. **24.** B. **25.** B. **26.** B. **27.** E. **28.** C. **29.** D. **30.** B. **31.** A. **32.** B. **33.** B. **34.** D. **35.** B. **36.** C. **37.** C. **38.** E. **39.** B. **40.** E.

11.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Найдем пределы выражений, стоящих в определении функции $f(x)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{1+x}{n}\right)\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{n^2}=e^{-(1+x)^2/2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{1/n}=$$
$$=\begin{cases}0, & \text{если } x=0,\\ 1, & \text{если } x\neq 0.\end{cases}$$

Оставшийся предел найдем для трех разных случаев:

Случай $0<x<1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}\left(x^{2n}+1\right)^{1/n}=\frac{1}{x}.$$

Случай $x=1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}(1+1)^{1/n}=1.$$

Случай $x>1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}x\left(1+\frac{1}{x^{2n}}\right)^{1/n}=x.$$

Таким образом, функцию $f(x)$ можно задать следующей формулой (см. также рис. 14):

$$f(x)=\begin{cases}e^{-(x+1)^2/2}, & \text{если } x<-1,\\ 1, & \text{если } -1\leqslant x<0,\\ 0, & \text{если } x=0,\\ 1/x, & \text{если } 0<x<1,\\ 1, & \text{если } x=1,\\ x, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

Следовательно, ответы на вопросы (а) — «да» (пределы существуют во всех точках вещественной оси), (б) — «да» (при $x\to-\infty$ функция $f(x)$ стремится к нулю), (в) — «да» (в точке $x=0$ достигается наименьшее значение, равное нулю), (г) — «нет» ($f'(1)$ не существует), (д) — «да».

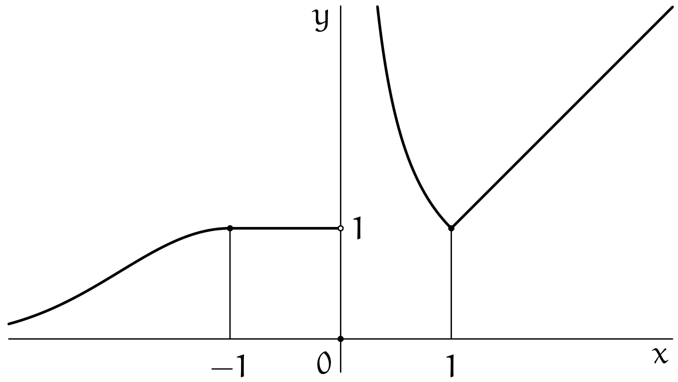


Рис. 14. График функции $f(x)$

Заметим, что если $x > 0$, то функция $f(x)$ неограничена на отрезке $[0, x]$, поэтому интеграл $\int_0^x f(t)dt$ не существует и функция $g(x)$ не определена. Если же $x \leqslant 0$, то $f(x)$ ограничена на отрезке $[x, 0]$, и функция $g(x)$ определена. Поэтому ответ на вопрос (е) — «нет». Так как $f(x)$ непрерывна при всех $x < 0$, то $g(x)$ дифференцируема при всех $x < 0$ (ответ на вопрос (ж) — «да»).

Так как функция $g(x)$ определена на $(-\infty, 0]$, то наклонная асимптота может быть только при $x \to -\infty$. Функция $f(x)$ положительная при всех $x < 0$, поэтому $g(x)$ возрастающая, и так как $g(0) = 0$, то при всех $x < 0$ значения $g(x) < 0$. Заметим, что так как $-(x+1)^2/2 < x + 2$, то функция $f(x) < e^{x+2}$ при $x \leqslant 0$, и функция $g(x)$ ограничена снизу функцией $\int_0^x e^{t+2}dt = e^2(e^x - 1)$. Легко видеть, что функция $e^2(e^x - 1)$ ограничена на $(-\infty, 0]$, а значит и $g(x)$ ограничена на $(-\infty, 0]$. Поэтому $g(x)$ как монотонная ограниченная функция имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, а значит имеет горизонтальную асимптоту (ответ на вопрос (з) — «нет»).

Задача 2. Рассматривая $g(x, y) = 0$ как уравнение на x при фиксированном y, легко убедиться, что оно имеет решение при любом значении y, таким образом, множество M не является ограниченным. Функция $f(x, y)$, являющаяся квадратом расстояния до точки $(a, 0)$, не является ограниченной на неограниченном множестве и, следовательно, не может достигать на нем наибольшего значения. Ответы на вопросы (а), (б) и (д) — «нет». При этом множество M очевидно является замкнутым; наименьшее значение функции $f(x, y)$ на M не может достигаться вне круга $D = \{(x, y) \in R^2 : (x - a)^2 + y^2 \leqslant a^2\}$ (значение функции f вне этого круга больше a^2, в то время как ее значение в точке $(0, 0)$, принадлежащей M, равно a^2). Множество $M \cap B$ компактно, и к нему применима теорема Вейерштрасса. Ответ на вопрос (в) — «да».

Заметим, что множество M не содержит точек с абсциссой $0 < x < 4$ и с абсциссой $x < -1$. Поэтому при $a = 2$ значение функции f на множестве M не может быть меньше 4, а значение 4 достигается сразу в двух точках $(0, 0)$ и $(4, 0)$, т. е., ответ на вопрос (г) — «нет». Аналогично, при $a = 1$ значение функции f на множестве M не может быть меньше 1, а значение 1 достигается в единственной точке $(0, 0)$, в которой выполнено

$\partial g(x,y)/\partial y = 0$, т. е., ответы на вопросы (е) и (ж) — «да». Наконец, при $a = -2$ значение функции f на множестве M также не может быть меньше 1, а значение 1 достигается в точке $(-1, 0)$, т. е., ответ на вопрос (з) — «нет».

Задача 3. Рассмотрим следующую матрицу 2×2:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(матрица, подобная кососимметрической). Легко видеть, что $B^2 = -I$. В качестве примера матрицы 6×6 можно предложить, например, блочно-диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

(ответ на вопрос (а) — «нет»). Заметим, что эта матрица не является ортогональной (ответ на вопрос (б) — «нет»).

Пусть теперь матрица A кососимметрическая, то есть $A^T = -A$. Тогда $A^T A = -A^2 = I$, а следовательно A — ортогональная (ответ на вопрос (в) — «да»).

Если $A^2 = -I$, то матрица A не может быть симметричной (для которой $A^2 = A^T A$ — положительно полуопределенная матрица). Следовательно, посылка в утверждении пункта (г) ложная, и ответ — «да».

Заметим, что матрица A невырожденная (иначе A^2 была бы вырожденной). Поэтому ее ядро нулевое, а образ равен всему пространству $\mathbf{R}^n$, и ответ на вопрос (д) — «да».

Если бы у матрицы A было одномерное инвариантное подпространство, то у нее был бы собственный вектор x (соответствующий каком-нибудь собственному числу λ). Но тогда этот же вектор x был бы собственным вектором матрицы A^2 и соответствовал бы собственному числу $\lambda^2 \geqslant 0$. Однако матрица A^2 отрицательно определена. Поэтому ответ на вопрос (е) — «нет».

Что касается инвариантных подпространств размерности два, то взяв *любой* ненулевой вектор x, мы получим, что векторы $\{x, Ax\}$ образуют линейно независимую систему, а так как $A(Ax) = A^2 x = -x$, то линейная оболочка $\langle x, Ax \rangle$ инвариантна относительно матрицы A. Таким образом, ответ на вопрос (ж) — «да».

Подпространства L_1 и L_2 из пункта (з) можно построить следующим образом:

1. зафиксируем ненулевой вектор x_1;

2. положим $y_1 = Ax_1$, заметим, что система $\{x_1, y_1\}$ линейно независимая, линейная оболочка $\langle x_1, y_1 \rangle$ инвариантна относительно A, и $Ay_1 = -x_1$;

3. выберем ненулевой вектор x_2, не принадлежащий линейной оболочке $\langle x_1, y_1 \rangle$;

4. положим $y_2 = Ax_2$, заметим, что $y_2 \notin \langle x_1, y_1, x_2\rangle$ (иначе $y_2 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \alpha_2 x_2$, и $-x_2 = Ay_2 = \alpha_1 Ax_1 + \beta_1 Ay_1 + \alpha_2 Ax_2 = \alpha_1 y_1 - \beta_1 x_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 y_1 - \beta_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + {}$ $+ \beta_1 y_1 + \alpha_2 x_2)$, и $x_2 \in \langle x_1, y_1\rangle$) а значит система $\{x_1, y_1, x_2, y_2\}$ линейно независимая;

5. повторяем действия в пунктах 3 и 4 до тех пор, пока есть возможность выбрать $x_{m+1} \notin \langle x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m\rangle$, то есть пока число векторов в системе $\{x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m\}$ не достигнет n.

В результате в качестве пространства L_1 можно взять линейную оболочку системы векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$, а в качестве пространства L_2 — линейную оболочку системы векторов $\{y_1, \ldots, y_m\}$. Ответ на вопрос (з) — «да».

Задача 4. Если $x < 0$, то ряд расходится, так как общий член ряда не стремится к нулю. При $x = 0$ ряд, очевидно, сходится, и $S(0) = 0$. Если $x > 0$, то ряд сходится, так как он представим в виде разности двух рядов, каждый из которых сходится, например, по признаку Даламбера. Таким образом, $M = [0, +\infty)$. Следовательно, ответ на вопрос (а) — «да», на вопрос (б) — «да». Так как $S(0) = 0$ и $S(x) > 0$ для любого $x > 0$, то на вопрос (в) ответ «нет».

Если $x > 0$, то
$$S(x) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}(e^{-nx} - e^{-3nx}) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-3x}}{1-e^{-3x}} = \frac{e^{-3x}(e^{2x}-1)}{(1-e^{-x})(1-e^{-3x})}. \tag{1}$$
Так как $e^x = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$, то из (1) следует, что
$$S(x) \geqslant \frac{c}{x} \tag{2}$$
в некоторой (правой) окрестности точки 0, где $c > 0$ — некоторая константа. Поэтому на вопрос (г) ответ «нет». Из (2) также следует, что функция $S(x)$ разрывна в нуле, значит, на вопрос (д) ответ «нет». Из (2) вытекает, что в точке 0 график функции $S(x)$ имеет вертикальную асимптоту, значит, на вопрос (е) ответ «да».

На отрезке $[0, 1]$ (компактное множество) каждая частичная сумма является непрерывной функцией, а предельная функция $S(x)$ разрывна. Поэтому на отрезке $[0, 1]$ сходимость не равномерная, и ответ на вопрос (ж) — «нет».

Если $x \geqslant 1$, то
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|n^2(e^{-nx} - e^{-3nx})\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n},$$
и числовой ряд в правой части неравенства сходится. По признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно на некомпактном множестве $[1, +\infty)$. Ответ на вопрос (з) — «да».

Задача 5. (а) Нет. Знакопеременный корень из гармонического ряда сходится как ряд Лейбница, а сумма его квадратов — гармонический ряд:
$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

(б) Нет, потому что если исходный ряд — всё тот же знакопеременный, а $f(x)$ постоянна (или периодична с периодом, равным 1), то получается сумма модулей знакопеременного ряда, которая не обязана сходиться (годится пример из (а), скажем).

(в) Нет. Оба ряда из примера пункта (а). Их произведение является гармоническим рядом, а радиус сходимости для функционального ряда на основе любых таких ухищрений равен единице.

(г) Нет, так как $f(n)$ может быть равна нулю во всех n, если период равен единице. Тогда указанный ряд — тождественный ноль.

(д) Нет. Зададим функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = \sqrt{2}k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Наименьший период этой функции равен $\sqrt{2}$, но так как $\sqrt{2}$ есть иррациональное число, то $f(n) = 0$ при всех натуральных n. Таким образом, радиус сходимости ряда равен бесконечности.

(е) Нет, так как если у $f(x)$ период равен 1, а исходный ряд из пункта (а), то у результирующего ряда радиус сходимости в точности равен 1.

(ж) Да, так как тогда $f(n) = \mathrm{const}$. Поэтому такой ряд сходится вместе с исходным рядом.

(з) Можно легко построить функцию, не являющуюся периодичной с периодом 1, но принимающую значение 0 в целых точках (например, $f(x) = \sin \pi x$). Поэтому ответ — «нет».

12 Вступительный экзамен 2011 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

12.1 Тест

12.1.1 Первая часть теста

1. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и $\{b_n\}$ — положительная последовательность, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

II. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то существует положительная последовательность $\{b_n\}$, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = +\infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

III. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то существует положительная последовательность $\{b_n\}$, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

A только I

B только II

C только I и II

D только II и III

E I, II и III

2. Даны подпространства L_1, L_2, L_3 линейного пространства $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 3$. Обозначим через n_1, n_2, n_3 размерности L_1, L_2, L_3 соответственно, и через $X \oplus Y$ прямую сумму подпространств X и Y. Тогда

A если $n_1 + n_2 = n$, то $\mathbf{R}^n = L_1 \oplus L_2$

B если $L_2 \neq L_3$, то $L_1 + L_2 \neq L_1 + L_3$

C если $n_2 \neq n_3$, то $L_1 + L_2 \neq L_1 + L_3$

D если $L_1 \oplus L_2 = L_1 \oplus L_3$, то $L_2 = L_3$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Даны матрицы A размера $m \times n$ и B размера $n \times m$. Тогда

A если $AB = I$, то $BA = I$

B если $AB = I$, то BA задает оператор проектирования

C если AB задает оператор проектирования, то $BA = I$

D если AB задает оператор проектирования, то BA задает оператор проектирования

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Дана квадратная вещественная матрица A порядка $n \geqslant 6$. Обозначим через $\det A$ определитель матрицы A. Тогда

A если $\det A > 0$, то у матрицы A существует отрицательное собственное число

B если $\det A < 0$, то у матрицы A существует положительное собственное число

C если $\det A > 0$, то у матрицы A существует положительное собственное число

D если $\det A < 0$, то у матрицы A существует отрицательное собственное число

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Дана ортогональная матрица A порядка $n \geqslant 6$. Обозначим через I единичную матрицу порядка n. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Матрица $\frac{1}{2}(I - A)$ задает оператор проектирования.

II. Если матрица A симметричная, то матрица $\frac{1}{2}(I+A)$ задает оператор проектирования.

III. Если матрица A кососимметричная, то матрица $\frac{1}{2}(I + A)$ задает оператор проектирования.

A ни одно из утверждений I, II и III

B только II

C только III

D только II и III

E I, II и III

6. Дана прямоугольная матрица A размера $m \times n$, b — столбец длины m, c — столбец длины n и x — искомый столбец подходящей длины. Через A^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице A. Тогда

A если система $Ax = b$ имеет решение при любом b, то система $A^T x = c$ имеет решение при любом c

B если система $Ax = b$ имеет решение при любом b, то система $A^T x = c$ не имеет решений ни при каком $c \neq 0$

C если система $Ax = b$ при любом b имеет единственное решение, то система $A^T x = c$ при любом c имеет единственное решение

D если система $Ax = b$ при любом b имеет не более одного решения, то система $A^T x = c$ при любом c имеет не более одного решения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Дана квадратная невырожденная матрица A порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A если A симметричная, то A^2 симметричная положительно определенная матрица

B если A несимметричная, то A^2 симметричная положительно определенная матрица

C если A^2 симметричная положительно определенная матрица, то A симметричная

D если A^2 симметричная положительно определенная матрица, то A несимметричная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Дана квадратная матрица A порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $A^2 + 2A = 0$. Тогда

A матрица A вырожденная

B матрица A невырожденная

C числа 0 и -2 оба являются собственными числами матрицы A

D хотя бы одно из чисел 0 и -2 не является собственным числом матрицы A

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Даны прямоугольные матрицы A размера $m \times n$ и B размера $n \times m$, где $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$. Известно, что матрица AB невырожденная. Тогда

A $m < n$

B $m \geqslant n$

C $\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} AB$

D $\operatorname{rank} BA \neq \operatorname{rank} AB$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Множество A является подмножеством множества вещественных чисел. Тогда

A если множество предельных точек множества A пустое, то множество A конечное

B если множество предельных точек множества A совпадает с множеством внутренних точек множества A, то множество A замкнутое

C если множество предельных точек множества A совпадает с множеством граничных точек множества A, то множество A замкнутое

D если множество предельных точек множества A замкнутое, то множество A замкнутое

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Рассматриваются подмножества вещественной оси. Тогда

A найдется замкнутое множество, являющееся конечным пересечением открытых множеств

B найдется замкнутое множество, являющееся счетным пересечением открытых множеств

C найдется открытое множество, являющееся конечным пересечением замкнутых множеств

D найдется открытое множество, являющееся счетным пересечением замкнутых множеств

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ не сходится. Тогда

A существует такая перестановка членов последовательности, что полученная последовательность сходится

B последовательность $\{b_n = e^{a_n}, n = 1, 2, \dots\}$ не сходится

C последовательность $\{c_n = a_n^3, n = 1, 2, \dots\}$ не сходится

D последовательность $\{d_n = a_n^2 - a_n + 1, n = 1, 2, \dots\}$ не сходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. На интервале (a, b) задана функциональная последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$, причем каждая функция $f_n(x)$ дифференцируема на (a, b). Тогда

A если последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на (a, b), то функция $f(x)$ непрерывна на (a, b)

B если последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на (a, b), то функция $f(x)$ дифференцируема на (a, b)

C если последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на (a, b) и для любого $x \in (a, b)$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$, то $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$

D если последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на (a, b), то последовательность $\{f_n^2(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится к функции $f^2(x)$ равномерно на (a, b)

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Функция $f(x)$ задана равенствами

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \leqslant 2, \\ ax^2 + b, & \text{если } x > 2, \end{cases}$$

и дифференцируема на всей прямой. Тогда

A $a = 3, b = -4$

B $a = 2, b = 0$

C $a = 1, b = 4$

D числа a, b не совпадают ни с одним из вариантов A, B, C

E таких чисел a, b не существует

15. Дана функция двух переменных $f(x, y) = x^2 + y^2$ и множество $M = \{(x, y)\colon \sqrt{|x|} + 2\sqrt{|y|} = 2\}$. Тогда

A функция $f(x)$ на множестве M достигает наибольшего значения в двух точках

B функция $f(x)$ на множестве M достигает наименьшего значения в двух точках

C любой локальный экстремум функции $f(x)$ на множестве M является либо точкой наименьшего, либо точкой наибольшего значения функции $f(x)$ на множестве M

D наибольшее значение функции $f(x)$ на множестве M равно 20

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — числовой ряд. Тогда

A если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ расходится

B если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\ln n}$ сходится

C если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ сходится

D если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\ln n}$ расходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Функция $f(x) = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$ разложена в окрестности точки $x_0 = 0$ в ряд Тейлора: $f(x) = f(0) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x^k$. Тогда

A $c_7 = 2, c_8 = 2$

B $c_7 = 1, c_8 = 0$

C $c_7 = -2, c_8 = 0$

D $c_7 = -1, c_8 = 0$

E числа c_7, c_8 не совпадают ни с одним из вариантов A, B, C, D

18. Дана функция двух переменных $f(x, y) = \min\{x, y\}$ и множество $M = \{(x, y)\colon (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5\}$. Тогда

A функция $f(x)$ на множестве M достигает наибольшего значения в двух точках

B функция $f(x)$ на множестве M достигает наименьшего значения в двух точках

C существует локальный минимум функции $f(x)$ на множестве M, который не является точкой наименьшего значения функции $f(x)$ на множестве M

D существуют два локальных максимума функции $f(x)$ на множестве M, которые не являются точками наибольшего значения функции $f(x)$ на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Объект A движется на координатной плоскости равномерно вдоль прямой $4y - 3x = 0$ со скоростью 20 м/сек в направлении увеличения x и y. Объект B движется на координатной плоскости равномерно вдоль прямой $3y - 4x = 0$ со скоростью 15 м/сек также в направлении увеличения x и y. В начальный момент времени объект A находится в начале координат, объект B — в точке с координатами $(21, 28)$ (единица измерения координат — метр). Объекты A и B будут находиться на наименьшем расстоянии

A через одну секунду после начала движения

B через две секунды после начала движения

C через три секунды после начала движения

D через промежуток времени, отличный от значений, перечисленных в A, B, C

E наименьшего расстояния не существует

20. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Найдите *ложное* утверждение.

A образ отрезка $[a, b]$ при отображении $f(x)$ является компактным множеством

B образ отрезка $[a, b]$ при отображении $f(x)$ является связным множеством

C функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$

D для любых чисел c, d, таких что $a < c < d < b$, выполнено равенство $f(d) - f(c) = \int_c^d f'(x)dx$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

21. Дана последовательность функций $f_n(x) = n^2\left(1 - \cos\dfrac{x^3 - 1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $M \subset \mathbf{R}$ — множество таких чисел x, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Для каждого $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда

A $\quad$ множество M ограничено сверху

B $\quad$ функция $f(x)$ является нечетной функцией

C $\quad$ график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту

D $\quad$ $f'(1) = 6$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Пусть M — множество сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n(x+1)^n}$. Тогда

A $\quad$ $M = (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$

B $\quad$ $M = (-\infty, -4/3) \cup (2/3, +\infty)$

C $\quad$ $M = (-4, 2)$

D $\quad$ $M = (-4/3, 2/3)$

E $\quad$ множество M не совпадает ни с одним из множеств в A, B, C, D

23. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ задана равенствами $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$, $n \geqslant 1$. Тогда

A $\quad$ существует такое число a, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ имеет две предельные точки

B $\quad$ существует такое число a, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ является неограниченной

C $\quad$ существует такое число $a \neq 2\pi$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2\pi$

D $\quad$ если $a = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pi$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24. Неопределенный интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2}x^3 dx}{2x^8 + 4}$ равен

A $\quad$ $\dfrac{\sqrt{2}x^4}{4} \ln(2x^8 + 4) + C$

B $\quad$ $\dfrac{\sqrt{2}}{16} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^4}{\sqrt{2}}\right) + C$

C $\quad$ $\dfrac{1}{8} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^4}{\sqrt{2}}\right) + C$

D $\quad$ $\dfrac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^4}{\sqrt{2}}\right) + C$

E $\quad$ другой функции, отличной от перечисленных в A, B, C, D

25. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[5]{n^5+5n^4}-\sqrt{n^2+2n}\right)$ равен

A $\quad 0$

B $\quad -3/2$

C $\quad 5/2$

D другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

26. Уравнение $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = 4-x$

A имеет единственное решение, лежащее в интервале $(0,1/5)$

B имеет единственное решение, лежащее в интервале $(1/5,1)$

C имеет единственное решение, лежащее в интервале $(2,3)$

D не имеет решения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

27. Острый угол, под которым кривые $x^2+2y^2=3$ и $x^2+3x+4y^2=8$ пересекаются в точке $(1,1)$, равен

A $\quad \operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}$

B $\quad \operatorname{arctg}\dfrac{5}{16}$

C $\quad \operatorname{arctg}\dfrac{2}{21}$

D $\quad \operatorname{arctg}\dfrac{3}{11}$

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

28. Интеграл

$$\int_0^2 \frac{5dx}{x^2-3x-4}$$

равен

A $\quad -\ln 3$

B $\quad -\ln 2/3$

C $\quad -5\ln 6$

D $\quad -\ln 6$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

29. Неопределенный интеграл

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x\,dx}{\ln(\sin x)}$$

равен

A $\ln\left|\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$

B $-\ln\left|\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$

C $-\ln\cos x + C$

D $\ln\ln\sin x + C$

E функции, отличной от перечисленных в A, B, C, D

30. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $\dfrac{dx}{dt} = x\sin t$, $x(0) = 1$, в точке $t = \pi$ равно

A e^2

B e

C e^{-1}

D 1

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

31. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $z' = (z + 4x)^2$, $z(0) = 2$, в точке $x = \pi/24$ равно

A $2/\sqrt{3}$

B $2/\sqrt{3} + \pi/6$

C $2\sqrt{3}$

D $2\sqrt{3} + \pi/6$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

32. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $\dfrac{dx}{dt} = xe^t - e^{e^{2t}}$, $x(0) = 2$, определено на

A интервале $(-\infty, e^e)$

B интервале $(-\infty, e^{2e})$

C интервале $(-\infty, 2e^e)$

D всей числовой прямой

E интервале, отличном от перечисленных в A, B, C, D

33. Предел
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi/2-10\sqrt{x})\ln\cos 2x}{(2^x-1)((x+1)^5-(x-1)^5)}$$
равен

A $-\dfrac{\ln 2}{5}$

B $-\dfrac{1}{5\ln 2}$

C -5

D $-5\ln 2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

34. Предел
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$$
равен

A ∞

B $1/6$

C $-1/12$

D 0

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

35. Предел
$$\lim_{x\to 0}\sin(e^{2x}-1)\cdot\sin(1/x)$$
равен

A 1

B 2

C e

D 0

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

36. Интеграл
$$\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx$$
равен

A 0

B π

C $-\pi$

D -2π

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

37. Интеграл
$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$$
равен

A $2/3$

B $4/3$

C $1/2$

D 1

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

38. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности нуля, причем существуют пределы $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)$ и $\lim\limits_{x\to 0} f(x)+g(x)$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Существует предел $\lim\limits_{x\to 0} f^2(x)+g^2(x)$.

II. Существует предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)-g(x)$.

III. Существует предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

A только I

B только II

C только I и II

D только II и III

E I, II и III

39. Функция $f(x)$ определена в окрестности нуля. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если для некоторого натурального k существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)x^k$, то и для любого натурального $l > k$ существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)x^l$.

II. Если для некоторого натурального k существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)x^k$, то существует и $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)x^k \ln x$.

III. Если для некоторого натурального k для любого натурального l существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)x^k \ln^l x$, то существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)x^{k-1}$.

A только I

B только II

C только I и II

D только I и III

E I, II и III

40. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на всей числовой прямой, причем $f(0) = g(0) = 0$. Тогда

A если $f(g(x))$ непрерывна в нуле и $g(x)$ непрерывна в нуле, то и $f(x)$ непрерывна в нуле

B если $f(g(x))$ непрерывна в нуле и $f(x)$ непрерывна в нуле, то и $g(x)$ непрерывна в нуле

C если $f(g(x))$ непрерывна в нуле и $g(f(x))$ непрерывна в нуле, то и $f(x)$ непрерывна в нуле

D если $f(f(x))$ непрерывна в нуле, то и $f(x)$ непрерывна в нуле

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12.1.2 Вторая часть теста

1. Квадратная матрица A четвертого порядка задает в стандартном базисе линейного пространства $\mathbf{R}^4$ оператор проектирования, не равный нулевому и тождественному операторам. Даны четыре вектора:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Известно, что x_1, x_2, x_3 являются собственными векторами матрицы A, а x_2, x_3, x_4 являются собственными векторами транспонированной матрицы A^T. Тогда

а) матрица A задает ортогональный проектор (при стандартном скалярном произведении);

Да Нет

б) ранг матрицы A равен 2;

Да Нет

в) ранг матрицы A не равен 2;

Да Нет

г) геометрическая кратность собственного числа 1 матрицы A равна трем;

Да Нет

д) вектор x_4 является собственным вектором матрицы A;

Да Нет

е) если сумма элементов матрицы A равна нулю, то точка $\lambda = 0$ является точкой перегиба характеристического многочлена $p(\lambda)$ матрицы A;

Да Нет

ж) если сумма элементов матрицы A равна 4, то точка $\lambda = 1$ является точкой перегиба характеристического многочлена $p(\lambda)$ матрицы A;

Да Нет

з) у матрицы A существует бесконечно много инвариантных подпространств размерности 3.

Да Нет

2. Даны функция $f(x, y) = (x + 2)^2 + y^2$ и множество $M = \{(x, y) \colon y^2 = x^3 + 3x^2\}$. Тогда а) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в единственной точке $(-3, 0)$;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ не достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в трех точках $(-2, 2)$, $(-2, -2)$, $(0, 0)$;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ не достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

д) точка $\left(-2/3, -\sqrt{28/27}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

е) точка $\left(-2/3, \sqrt{28/27}\right)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

ж) точка $(-2, 2)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) точка $(1, 2)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

Да Нет

3. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha x}{\sqrt{t^2 + 1}} + \beta(t), \quad x(0) = \gamma,$$

где α и γ — вещественные числа, а $\beta(t)$ — непрерывная функция, определенная на всей вещественной прямой. Тогда

а) если $\beta(t) \geqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$, то $x(t)$ монотонно не убывает при всех $t \geqslant 0$;

Да Нет

б) если $\beta(t)$ ограничена на всей числовой прямой, то $x(t)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

в) функция $x(t)$ определена на всей числовой прямой;

Да Нет

г) если $\beta(t) \equiv 0$, то $x(t)$ — нечетная функция;

Да Нет

д) если $\alpha < 0$, $\gamma < 0$ и $\beta(t) \leqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$, то $x(t) \leqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$ из области определения $x(t)$;

Да Нет

е) если $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ и $\beta(t) \geqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$, то $x(t) > \int_0^t \beta(u)\,du$ при всех $t \geqslant 0$ из области определения $x(t)$;

Да Нет

ж) если $\alpha = 1$, $\gamma = 0$, $\beta(t) = 1 + \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, то $x(3/2) \geqslant e$;

Да Нет

з) если $\alpha = 3$, $\gamma = 0$, $\beta(t) = 8t^3$, то $x(5) < 5000$.

Да Нет

4. Функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, определяется равенством $f(x) = \int_{3x-2}^{x^2-x+1} g(t)dt$, где $g(t) = \dfrac{1}{|t|+2}$, $t \in \mathbf{R}$. Тогда

а) производная $f'(x)$ существует при каждом $x \in \mathbf{R}$;

Да Нет

б) уравнение $f(x) = 0$ имеет два решения;

Да Нет

в) функция $f(x)$ достигает на $\mathbf{R}$ наибольшего значения;

Да Нет

г) функция $f(x)$ достигает на $\mathbf{R}$ наименьшего значения;

Да Нет

д) точка $x = \sqrt{3}$ является точкой локального минимума функции $f(x)$;

Да Нет

е) на отрезке $[-1, 0]$ функция $f(x)$ возрастает;

Да Нет

ж) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту.

Да Нет

5. Пусть множества M_1 и M_2 определяются следующим образом:

$$M_1 = \left\{ x < 0\colon \text{существует } \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n \right\},$$
$$M_2 = \left\{ x > 1\colon \text{ряд } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n!} \text{ сходится} \right\}.$$

Функция $f(x)$ определяется равенством

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n, & \text{если } x \in M_1, \\ a, & \text{если } x \in [0, 1], \\ b - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-1)^{2n}}{n!}, & \text{если } x \in M_2, \end{cases}$$

где a, b — константы. Обозначим через $M = M_1 \cup [0,1] \cup M_2$. Тогда

а) при $a = 0$, $b = 2$ функция $f(x)$ достигает на M наибольшего значения;

Да Нет

б) при $a = 1$, $b = 1$ функция $f(x)$ достигает на M наименьшего значения;

Да Нет

в) существуют числа a, b, такие что $(-1/2, 1/2) \subset M$ и функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $(-1/2, 1/2)$;

Да Нет

г) существуют числа a, b, такие что $(1/2, 3/2) \subset M$ и функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $(1/2, 3/2)$;

Да Нет

д) точка $x = -\sqrt{2/3}$ является точкой перегиба графика функции $f(x)$;

Да Нет

е) при любых a, b уравнение $f(x) = x$ имеет решение;

Да Нет

ж) при любых a, b график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту;

Да Нет

з) существуют такие числа a, b, что график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту с ненулевым углом наклона.

Да Нет

12.2 Ответы и решения теста

12.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. E. **2.** E. **3.** B. **4.** D. **5.** B. **6.** C. **7.** A. **8.** E. **9.** C. **10.** B. **11.** B. **12.** C. **13.** A. **14.** A. **15.** A. **16.** C. **17.** B. **18.** C. **19.** C. **20.** D. **21.** E. **22.** E. **23.** D. **24.** C. **25.** B. **26.** D. **27.** C. **28.** D. **29.** D. **30.** A. **31.** E. **32.** D. **33.** E. **34.** B. **35.** D. **36.** D. **37.** A. **38.** A. **39.** A. **40.** E.

12.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Заметим, что векторы x_1, x_2, x_3 являются собственными векторами матрицы A и не ортогональны вектору x_4, который является собственным вектором матрицы A^T. Отсюда следует, что все эти четыре вектора соответствуют одному и тому же собственному числу. Кроме того, векторы x_2 и x_3 соответствуют тому же собственному числу также и как собственные векторы матрицы A^T (они не ортогональны сами себе). Это собственное число может быть одним из двух: 0 или 1, так как матрица A задает проектор. Оставшийся четвертый собственный базисный вектор должен соответствовать другому собственному числу, так как матрица A не совпадает с нулевой и единичной. Поэтому этот вектор должен быть ортогонален векторам x_2, x_3 и x_4 (собственные векторы матрицы A^T, соответствующие другому собственному числу). Легко подобрать такой вектор (обозначим его через y_4), например,

$$y_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T,$$

и убедиться, что векторы x_1, x_2, x_3 и y_4 образуют базис в $\mathbf{R}^4$. В этом базисе матрица оператора, задаваемого матрицей A в стандартном базисе, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ответы на вопросы а) — «нет» (так как вектор y_4 не ортогонален линейной оболочке векторов x_1, x_2, x_3), б) — «нет», в) — «да» (ранг матрицы A равен 1 или 3), г) — «нет» (геометрическая кратность собственного числа 1 может быть равна 1), д) — «нет» (если бы x_4 был собственным вектором матрицы A, то он был бы обязан соответствовать тому же собственному числу, что и x_1, x_2 и x_3, а это невозможно).

Рассмотрим сумму элементов матрицы A. Ее можно записать в виде

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Вектор $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ можно представить в виде суммы $x_2 + x_3$. Оба эти вектора — собственные, соответствуют собственному числу 0 или 1 (одному и тому же). Поэтому в первом случае

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 0$$

и характеристический многочлен матрицы A есть многочлен $p(\lambda) = (-\lambda)^3(1-\lambda)$. Во втором случае

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 4$$

и характеристический многочлен матрицы A есть многочлен $p(\lambda) = (-\lambda)(1-\lambda)^3$. Отсюда получаем ответы на вопросы е) — «да» и ж) — «да».

Чтобы построить бесконечно много инвариантных подпространств размерности 3, достаточно взять всевозможные двумерные подпространства линейной оболочки векторов x_1, x_2, x_3 (инвариантны как подпространства собственного подпространства матрицы A) и рассматривать их суммы с линейной оболочкой вектора y_4 (собственное подпространство). Так как сумма инвариантных подпространств инвариантна, то построенные трехмерные подпространства инвариантны относительно A, и ответ на вопрос з) — «да».

Задача 2. Подставим выражение для y^2 из определения множества M в функцию $f(x, y)$. Получим функцию $g(x) = (x+2)^2 + x^3 + 3x^2 = x^3 + 4x^2 + 4x + 4$. Так как y^2 не может быть отрицательным, то функцию $g(x)$ нужно исследовать на множестве, где $x^3 + 3x^2 \geqslant 0$ (или $x \in [-3, +\infty)$).

Критические точки функции $g(x)$ на множестве $[-3, +\infty)$ найдем, приравняв производную к нулю:

$$g'(x) = 3x^2 + 8x + 4 = 0,$$

откуда получим $x = -2$ или $x = -2/3$. Добавим также левый конец полуинтервала $x = -3$.

Так как при $x \to +\infty$ значения функции $g(x)$ стремятся к $+\infty$, то $g(x)$ не достигает наибольшего значения на $[-3, +\infty)$ (а значит и $f(x, y)$ не достигает наибольшего значения на M, поэтому ответы на вопросы в) — «нет», г) — «да»).

Функция $g(x)$ — кубическая парабола, которая на множестве $[-3, +\infty)$ достигает наименьшего значения либо на левом его конце, либо во внутренней точке, в которой производная равна нулю. Как видно,

$$g(-3) = (-3)^3 + 4 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 4 = 1,$$
$$g(-2) = (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 4 = 4,$$
$$g(-2/3) = (-2/3)^3 + 4 \cdot (-2/3)^2 + 4 \cdot (-2/3) + 4 = 76/27 < 4.$$

Это означает, что наименьшее значение достигается в точке $x = -3$, которая соответствует единственной точке $x = -3$, $y = 0$ множества M (действительно, $y^2 = (-3)^3 + 3 \cdot \cdot (-3)^2 = 0$). Таким образом, ответы на вопросы а) — «да» и б) — «нет».

Рассмотрим вторую производную функции $g(x)$ во внутренних точках множества $[-3, +\infty)$.

$$g''(x) = 6x + 8.$$

Как видно, $g''(-2) = 6 \cdot (-2) + 8 = -4 < 0$, $g''(-2/3) = 6 \cdot (-2/3) + 8 = 4 > 0$, откуда следует, что точка $x = -2$ является точкой локального максимума, а точка $x = -2/3$ — точкой локального минимума функции $g(x)$. Этим точкам соответствуют следующие точки множества M: $x = -2$, $y = \pm 2$ и $x = -2/3$, $y = \pm\sqrt{28/27}$. Таким образом, ответы на вопросы д) — «да», е) — «нет», ж) — «да», з) — «нет» (точка $x = 1$, $y = 2$ не является стационарной).

На рисунке 15 изображены множество M и критические точки функции $f(x, y)$ на нем в исходных координатах (x, y).

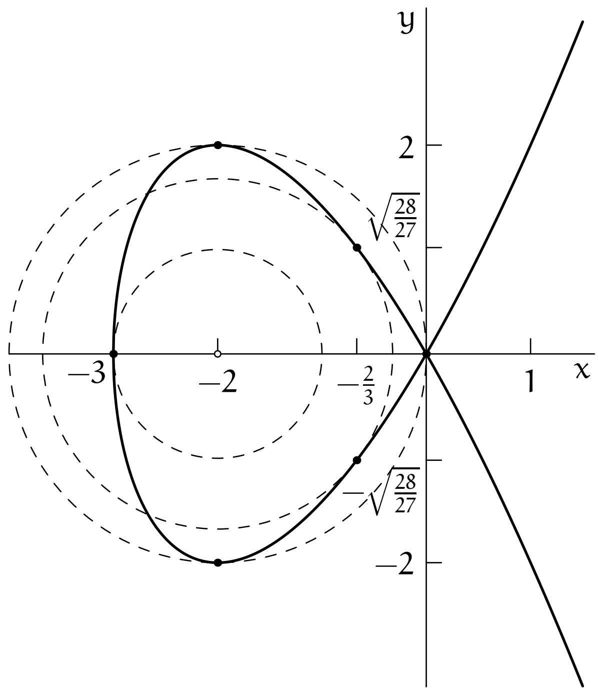


Рис. 15. Множество M и линии уровня функции $f(x, y)$

Задача 3. Найдем решение данного дифференциального уравнения. Однородное уравнение
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha x}{\sqrt{t^2+1}}$$
может быть проинтегрировано с помощью таблицы интегралов, его общим решением является функция $x(t) = C \cdot \left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^{\alpha}$. Решение исходного уравнения может быть найдено с помощью метода вариации постоянной: если подставить $x(t) = C(t) \cdot \bigl(t + \sqrt{t^2+1}\bigr)^{\alpha}$ в исходное уравнение, то после упрощения получим
$$\frac{dC}{dt}\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^{\alpha} = \beta(t),$$
откуда нетрудно вывести решение исходной задачи:
$$x(t) = \left[\gamma + \int_0^t \frac{\beta(\tau)d\tau}{\left(\tau + \sqrt{\tau^2+1}\right)^{\alpha}}\right]\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^{\alpha}.$$

Из явного вида решения немедленно следуют ответы на вопросы а) — «нет» (достаточно положить $\beta(t) \equiv 0$, $\alpha > 0$ и $\gamma < 0$), б) — «нет» (например, при $\beta(t) \equiv 0$, $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$), в) — «да», г) — «нет» (при $\gamma \neq 0$), д) — «да» (следует из того, что выражение в квадратных скобках отрицательное при всех $t \geqslant 0$), е) — «да» (достаточно внести выражение вне квадратных скобок под знак интерграла, оно строго больше знаменателя дроби во всех внутренних точках отрезка $[0, t]$).

Для параметров вопроса ж) решение задачи Коши можно вычислить в явном виде (снова воспользовавшись табличным интегралом), оно равно $x(t) = \bigl(t + \sqrt{t^2+1}\bigr)\ln\bigl(t + \sqrt{t^2+1}\bigr)$ и в точке $t = 3/2$ превышает $\bigl(3 + \sqrt{13}\bigr)/2 > 3 > e$) (ответ на вопрос ж) — «да»).

Чтобы ответить на вопрос з), подставим параметры в решение уравнения:
$$x(t) = \int_0^t \frac{8\tau^3 d\tau}{\left(\tau + \sqrt{\tau^2+1}\right)^3}\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^3 = 8\int_0^t \frac{d\tau}{\left(1 + \sqrt{1 + 1/\tau^2}\right)^3}\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^3.$$
Заметим, что под интегралом стоит положительная возрастающая на $[0, t]$ функция, поэтому
$$\int_0^t \frac{d\tau}{\left(1 + \sqrt{1 + 1/\tau^2}\right)^3} \leqslant \int_0^t \frac{d\tau}{\left(1 + \sqrt{1 + 1/t^2}\right)^3} = \frac{t}{\left(1 + \sqrt{1 + 1/t^2}\right)^3}.$$
Таким образом,
$$x(t) \leqslant \frac{8t}{\left(1 + \sqrt{1 + 1/t^2}\right)^3}\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^3 = 8t^4,$$
и $x(5) \leqslant 8 \cdot 5^4 = 5000$ (ответ на вопрос з) — «да»).

Задача 4. Подынтегральная функция $g(t)$ непрерывна при каждом $t \in \mathbf{R}$, а пределы интегрирования как функции от x имеют производные при каждом $x \in \mathbf{R}$. Следовательно, функция $f(x)$ имеет производную при каждом $x \in \mathbf{R}$ и
$$f'(x) = \frac{1}{|x^2 - x + 1| + 2} \cdot (2x - 1) - \frac{1}{|3x - 2| + 2} \cdot 3. \tag{1}$$

Из положительности функции $g(t)$ следует, что

$$\begin{aligned}
&f(x) > 0, && \text{если } x^2 - x + 1 > 3x - 2,\\
&f(x) < 0, && \text{если } x^2 - x + 1 < 3x - 2,\\
&f(x) = 0, && \text{если } x^2 - x + 1 = 3x - 2.
\end{aligned}$$

Поэтому имеем:

$$\begin{aligned}
&f(x) > 0, && \text{если } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty),\\
&f(x) < 0, && \text{если } x \in (1, 3),\\
&f(0) = f(3) = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, на вопросы а) и б) ответы «да». Из (1) следует (мы опускаем рутинные вычисления, заметим только, что $x^2 - x + 1 > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$), что

$$f'(x) = \frac{-9x^2 + 14x - 13}{(x^2 - x + 3)(4 - 3x)} \qquad \text{при } x < \frac{2}{3}, \tag{2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3}{(x^2 - x + 3)x} \qquad \text{при } x \geqslant \frac{2}{3}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\begin{aligned}
&f'(x) < 0 && \text{при } x < \sqrt{3},\\
&f'(x) > 0 && \text{при } x > \sqrt{3},\\
&f'(\sqrt{3}) = 0.
\end{aligned}$$

Значит, функция $f(x)$ строго убывает на $\left(-\infty, \sqrt{3}\right)$ и строго возрастает на $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$. Таким образом, на вопрос в) ответ «нет», на вопросы г) и д) ответы «да», на вопрос е) ответ «нет».

Если $x > 3$, то $f(x) = \ln \dfrac{x^2 - x + 3}{3x}$, и при $x \to +\infty$ функция $f(x)$ имеет порядок роста такой же, как $\ln x$. Аналогично при $x \to -\infty$ функция $f(x)$ эквивалентна $3 \ln |x|$. Значит, на вопросы ж) и з) ответы «нет».

Задача 5. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$ при любом вещественном k. Поэтому $M_1 = (-\infty, 0)$ и $f(x) = e^{-1/x^2}$ на M_1. Поскольку $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{k^n}{n!} = e^k$ при любом вещественном k, то $M_2 = (1, +\infty)$ и $f(x) = b - e^{(x-1)^2}$ на M_2. Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x < 0,\\ a, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1,\\ b - e^{(x-1)^2}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

При $a = 0$, $b = 2$ имеем $f(x) < 1$ при любом вещественном x, но $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x) = 1$. Поэтому на вопрос а) ответ «нет». Поскольку $b - e^{(x-1)^2} \to -\infty$ при $x \to +\infty$ при любом вещественном b, то ответ на вопрос б) «нет».

Если $a = 0$, то можно показать (используя, например, индукцию), что функция $f(x)$ в точке $x = 0$ имеет производные всех порядков и $f^{(n)}(0) = 0$ для всех $n \geqslant 0$. Поэтому при $a = 0$ и при любом b функция $f(x)$ дважды (и даже бесконечно) непрерывно дифференцируема на $(-1/2, 1/2)$. Значит, на вопрос в) ответ «да».

При любых a, b имеем:

$$
\begin{aligned}
&f''(x) = 0, && \text{если } 1/2 < x < 1,\\
&f''(x) = -2(1 + 2(x-1)^2)e^{(x-1)^2}, && \text{если } 1 < x < 3/2.
\end{aligned}
$$

Поскольку $\lim\limits_{x \to 1-0} f''(x) = 0$, а $\lim\limits_{x \to 1+0} f''(x) = -2$, то ответ на вопрос г) «нет».

Если $x < 0$, то $f(x) = e^{-1/x^2}$ и, следовательно,

$$
f''(x) = \frac{2}{x^4}\left(\frac{2}{x^2} - 3\right) e^{-1/x^2}.
$$

Поэтому единственной точкой перегиба является точка $-\sqrt{2/3}$. Ответ на вопрос д) «да».

Если, например, $a = -1$, $b = 0$, то $f(x) < 0$ при любом $x \geqslant 0$. Кроме того, $f(x) > 0$ при любом $x < 0$. Значит, уравнение $f(x) = x$ решений не имеет. Ответ на вопрос е) «нет».

Поскольку $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ при любых a, b, то ответ на вопрос ж) «да». При любых a, b предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)/x = -\infty$. Поэтому ответ на вопрос з) «нет».

13 Вступительный экзамен 2012 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

13.1 Тест

13.1.1 Первая часть теста

1. Пусть A — непустое подмножество $\mathbf{R}$ и точка $x \in \mathbf{R}$. Тогда

A если x — изолированная точка множества A, то x граничная точка множества A

B если x — граничная точка множества A, то x изолированная точка множества A

C если x — предельная точка множества A, то x граничная точка множества A

D если x — граничная точка множества A, то x предельная точка множества A

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Пусть A — ограниченное счетное подмножество $\mathbf{R}$. Тогда

A $\quad A$ — открытое множество

B $\quad A$ — замкнутое множество

C $\quad A$ — компактное множество

D $\quad A$ — не является ни открытым, ни замкнутым множеством

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Дана система векторов $\{x_1, \dots, x_m\}$, $m \geqslant 2$, в пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$. Известно, что каждый из векторов $x_1, \dots, x_m$ линейно выражается через остальные векторы системы. Через $\mathscr{L}(x_1, \dots, x_m)$ обозначается линейная оболочка системы векторов $\{x_1, \dots, x_m\}$, и через $\dim \mathscr{L}(x_1, \dots, x_m)$ — ее размерность. Тогда

A $\quad \dim \mathscr{L}(x_1, \dots, x_m) = m - 1$

B $\quad$ если $\dim \mathscr{L}(x_1, \dots, x_m) = n$, то $m = n + 1$

C $\quad$ если $\dim \mathscr{L}(x_1, \dots, x_m) = n$, то любые n векторов системы $\{x_1, \dots x_m\}$ линейно независимые

D $\quad$ если $\dim \mathscr{L}(x_1, \dots, x_m) = m - 1$, то любые $m - 1$ векторов системы $\{x_1, \dots x_m\}$ линейно независимые

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Даны две ненулевые матрицы A и B размера $m \times n$ и $n \times m$ соответственно, где $m, n \geqslant 2$. Обозначим через a столбец длины m, через b столбец длины n и через x и y искомые столбцы подходящей длины. Тогда

A $\quad$ если система $ABx = Ab$ имеет решение при любом b, то система $Bx = b$ имеет решение при любом b

B $\quad$ если система $ABx = Ab$ при любом b имеет не более одного решения, то система $Bx = b$ при любом b имеет не более одного решения

C $\quad$ если система $ABx = a$ имеет решение при любом a, то система $BAy = b$ имеет решение при любом b

D $\quad$ если система $ABx = a$ при любом a имеет не более одного решения, то система $BAy = b$ при любом b имеет не более одного решения

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, α — вещественное число. Через $\det X$ обозначается определитель квадратной матрицы X. Тогда

A $\det(A + B) = \det A + \det B$

B $\det(A - B) = \det A - \det B$

C $\det(\alpha A) = \alpha \det A$

D $\det(AB) = \det A \det B$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — линейные операторы из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 2$. Известно, что $\mathbf{BA} = 0$. Через $\operatorname{Ker} \mathbf{X}$ и $\operatorname{Im} \mathbf{X}$ обозначим ядро и образ оператора $\mathbf{X}$ соответственно. Тогда

A $\operatorname{Im} \mathbf{A} \subset \operatorname{Ker} \mathbf{B}$

B $\operatorname{Im} \mathbf{A} \subset \operatorname{Im} \mathbf{B}$

C $\operatorname{Ker} \mathbf{A} \subset \operatorname{Im} \mathbf{B}$

D $\operatorname{Ker} \mathbf{A} \subset \operatorname{Ker} \mathbf{B}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $A + B = I$, где I — единичная матрица. Найдите ***ложное*** утверждение

A если A — матрица проектирования, то B — матрица проектирования

B если A — матрица проектирования, то $AB = 0$

C если $AB = 0$, то A и B — матрицы проектирования

D если $AB = 0$, то $BA = 0$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

8. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, трактуемые как линейные операторы в пространстве $\mathbf{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. Обозначим через $B^\top$ матрицу, транспонированную к B, через $L^\perp$ — ортогональное дополнение к подпространству L и через $\operatorname{Im} X$ — образ матрицы X. Тогда

A если $B^\top A = 0$, то $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму $\operatorname{Im} A$ и $\operatorname{Im} B$

B если $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму $\operatorname{Im} A$ и $\operatorname{Im} B$, то $B^\top A = 0$

C если $B^\top A = 0$, то $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Im} B)^\perp$

D если $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Im} B)^\perp$, то $B^\top A = 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A если матрица A перестановочна с транспонированной A^T, то A симметричная

B если существует невырожденная матрица B, такая что $B^{-1}AB$ диагональная, то матрица A симметричная

C если существует скалярное произведение в пространстве $\mathbf{R}^n$, такое что матрица A при этом скалярном произведении задает самосопряженный оператор, то A симметричная

D если существует невырожденная матрица B, такая что $B^T AB$ диагональная, то A симметричная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Даны две симметричные матрицы A и B порядка $n \geqslant 2$, причем матрица A является положительно определенной. Тогда

A если все собственные числа матрицы AB неотрицательные, то матрица B положительно полуопределена

B многочлен $\det(\lambda A + B)$ не имеет вещественных корней (через $\det X$ обозначается определитель матрицы X)

C если все элементы матрицы B неотрицательные, то матрица $A + B$ положительно определена

D если матрица $A + B$ положительно определена, то у матрицы B существует неотрицательный элемент

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Функции $f(x)$, $g(x)$ заданы на всей числовой прямой и являются периодическими. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Функция $h(x) = f(x) + g(x)$ является периодической.

II. Функция $s(x) = f(x) \cdot g(x)$ является ограниченной.

III. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ не являются постоянными, то на каждом конечном отрезке $[a, b]$ уравнение $f(x) + g(x) = 0$ имеет конечное число решений.

A только I

B только I и III

C только III

D I, II и III

E все утверждения I, II и III являются ложными

12. Пусть $x_1 = a$, $x_2 = b$, где $a < b$, и $x_{n+2} = \dfrac{3}{4}x_n + \dfrac{1}{4}x_{n+1}$, $n = 1, 2, ...$. Тогда

A при любых a и b последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ является монотонной последовательностью

B существуют такие числа a, b, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ не сходится

C при любых a, b последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{3a+4b}{7}$

D при любых a, b последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{2a+3b}{5}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Предел $\lim\limits_{x\to 4}\left(3 - \dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-5x+4}}$ равен

A $1/\sqrt[6]{e}$

B $1/\sqrt[3]{e}$

C $1/\sqrt{e}$

D $\sqrt[4]{e}$

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

14. Высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, уменьшается со скоростью, пропорциональной площади треугольника. В момент времени $t = 0$ площадь треугольника равна 2, в момент времени $t = 1$ площадь треугольника равна $1/2$. Площадь треугольника в момент времени $t = 3$ равна

A $1/4$

B $1/6$

C $1/8$

D $1/10$

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

15. Функция $f(x)$ задана на множестве $[0, +\infty)$, дифференцируема на $(0, +\infty)$, и ее график имеет наклонную асимптоту $y = a + bx$, $b \neq 0$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = B$, то $b = B$.

II. Существуют точки $0 < x_1 < x_2$, такие что $b = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

III. Если $f'(x) < b$ при любом $x > 0$, то существует такое число $N > 0$, что $f(x) < a + bx$ при любом $x > N$.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

16. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[6]{n^6 + 6n^5} - \sqrt{n^2 + 2n}\right)$ равен

A 0

B -2

C -1

D 1

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

17. Функция $f(x)$ задана на всей числовой прямой $\mathbf{R}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) являются истинными?

I. Если $f(x)$ является четной функцией и имеет первообразную на $\mathbf{R}$, то у $f(x)$ существует первообразная, которая является нечетной функцией.

II. Если $f(x)$ является периодической функцией и имеет первообразную на $\mathbf{R}$, то у $f(x)$ существует первообразная, которая является периодической функцией.

III. Если функция $f(x)$ имеет точки разрыва на $\mathbf{R}$, то у $f(x)$ не существует первообразной на $\mathbf{R}$.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

18. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1 + x + x^2)}{e^x + e^{-x} - 2}$ равен

A $-1/2$

B -1

C -2

D 0

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

19. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R_1, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ имеет радиус сходимости R_2. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ равен

A $\min\{R_1, R_2\}$

B $\max\{R_1, R_2\}$

C $\sqrt{R_1^2 + R_2^2}$

D $\dfrac{R_1 + R_2}{2}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Пусть b — вещественное число. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ называется b-странной, если существует такое натуральное число N, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - b| < \varepsilon$. Тогда

A существует такое число b, для которого не существует b-странных последовательностей

B существует такое число b, для которого некоторая b-странная последовательность является неограниченной

C существует такое число b, для которого некоторая b-странная последовательность имеет предел

D любая b-странная последовательность является монотонной

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Предел $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x)^{1/x}$ равен

A 1

B e

C $\sqrt{e}$

D $\sqrt[4]{e}$

E — числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

22. Пусть $a > 0$, $b > 0$. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a+b}\right)^{1/x}$ равен

A — $(a+b)^{ab}$

B — $a^{a/(a+b)}b^{b/(a+b)}$

C — $\dfrac{ab}{a+b}$

D — $(ab)^{1/(a+b)}$

E — числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

23. Интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{5\,dx}{x^2-x-6}$ равен

A — $\ln\dfrac{4}{9}$

B — $\ln\dfrac{9}{4}$

C — $5\ln\dfrac{9}{4}$

D — $-5\ln\dfrac{9}{4}$

E — числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

24. Интеграл $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\,dx}{x^2-2x+2}$ равен

A — $2\operatorname{arctg}(\pi+1)$

B — $2\ln\dfrac{1}{2}$

C — $2(\operatorname{arctg}(\pi-1)+\operatorname{arctg}(\pi+1))$

D — $2\cos\dfrac{9\pi}{16}$

E — числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

25. Интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{3\cos x\sin x}{x^2-3x+2}\,dx$ равен

A — $\ln\dfrac{1}{2}$

B — $3\ln\dfrac{1}{2}$

C — $\pi/2-3$

D — $3/2-\pi/2$

E — числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

26. Интеграл $\int_0^{\pi/2} (\cos^2 x + \cos x + 1)dx$ равен

A $\quad 0$

B $\quad 1 + 3\pi/4$

C $\quad -1 + \pi/4$

D $\quad 1 - \pi/4$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

27. Интеграл $\int_0^{\pi/2} (2\sin^2 x + \cos^2 x)dx$ равен

A $\quad \pi/2$

B $\quad 1 + 3\pi/4$

C $\quad 3\pi/4$

D $\quad 1 + \pi/4$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

28. Интеграл $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^7 x - 1)dx$ равен

A $\quad -\pi/2$

B $\quad -\pi/4$

C $\quad -\pi$

D $\quad -\pi^7 + 1$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

29. Неопределенный интеграл $\int \frac{2x-1}{x^2 - x - 12}\,dx$ равен

A $\quad \ln\left|x^2 - x - 12\right| + C$

B $\quad \ln\left|\frac{x-4}{x+3}\right| + C$

C $\quad \ln\left|\frac{x+4}{x-3}\right| + C$

D $\quad \ln\left|\frac{x^2 - x - 12}{2x-1}\right| + C$

E $\quad$ семейству функций, отличному от перечисленных в A, B, C, D

30. Значение максимального решения задачи Коши $y' = 5 - \frac{y}{x}$ при начальном условии $y(1) = 2$ в точке $x = 4$ равно

A 4/9

B 79/8

C 23/7

D 17/9

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не определено

31. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны при всех вещественных x. Тогда

A если $f(g(x))$ и $f(x)$ дифференцируемы при всех x, то и $g(x)$ дифференцируема при всех x

B если $f(g(x))$ и $g(x)$ дифференцируемы при всех x, то и $f(x)$ дифференцируема при всех x

C если $f^2(x)$ дифференцируема при всех x, то и $f(x)$ дифференцируема при всех x

D если $f(x)$ дифференцируема при всех x, то и $f^2(x)$ дифференцируема при всех x

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$ и принимает на нем значения между нулем и единицей. Тогда

A если $f(x)$ не возрастает, причем $f(0) > 0$ и $f(1) < 1$, то решение уравнения $f(x) = x$ существует и единственно

B если $f(x)$ непрерывна, строго возрастает на отрезке $[0, a]$, причем $f(0) > 0$ и $f(a) = 1$, и уравнение $f(x) = x$ имеет конечное число n решений на отрезке $[0, a]$, то n четно

C если уравнение $f(f(x)) = x$ имеет не более одного решения, то и уравнение $f(x) = x$ имеет не более одного решения

D если $f(f(x))$ непрерывна и не убывает, то и $f(x)$ не убывает

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

33. Функция $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ на множестве $|x| + 2|y| = 2$

A достигает наибольшего значения в единственной точке

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

D достигает наибольшего значения в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

34. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0,1]$, а производная $f'(x)$ существует и непрерывна на интервале $(0,1)$, причем $f(0)=0$. Тогда

A если функция $f(x)$ ограничена на $(0,1)$ сверху числом M, то и функция $f'(x)$ ограничена на $(0,1)$ сверху числом M

B если функция $f(x)\cdot f'(x)$ ограничена на $(0,1)$ числом M, то и функция $f(x)$ ограничена на $(0,1)$ сверху числом M

C если функция $f(x)\cdot f'(x)$ ограничена на $(0,1)$ сверху числом M, то и функция $f'(x)$ ограничена на $(0,1)$ сверху числом M

D если функция $\sqrt{f^2(x)+f'^2(x)}$ ограничена на $(0,1)$ сверху числом M, то и функция $f(x)$ ограничена на $(0,1)$ сверху числом M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

35. Неявная функция $y(x)$ задана уравнением $y^6-y^5+x=1$ в окрестности точки $x=1$, $y=0$. Тогда ее производная в точке $x=1$

A равна 0

B равна 1

C равна -1

D не существует

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y'=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+9}}$, $y(0)=3$. Тогда значение $y(4)$

A равно 1

B равно 4

C равно 9

D равно $\ln 13$

E равно числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не определено

37. Производная функции $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{2n}\right)^n$ в точке $x=1$

A равна 1

B равна e

C равна $\sqrt{e}$

D равна $\dfrac{\sqrt{e}}{2}$

E равна числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

38. Производная функции $f(x) = (\cos x)^{\cos x}$ в точке $x = 0$

A равна 1

B равна 0

C равна $\ln(\pi/2)$

D равна $(\pi/2)^{\pi/2}$

E равна числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

39. Функция $f(x)$ определена, непрерывна и принимает положительные значения на полупрямой $[0, +\infty)$ вместе со своей производной, причем $f(0) = e$ и для любого $x > 0$ выполнено неравенство $f'(x) < f(x)$. Тогда

A $f(1) < e$

B $f(e) < e^e$

C $f(2e) < e^8$

D $f(e^2) < e^{e^2}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

40. Пусть $f(x) = x^2 \sin(x^3)$ и M — множество ее критических точек (точек, в которых производная $f'(x) = 0$). Тогда

A множество M состоит из изолированных точек

B множество M компактно

C функция $f(x)$ достигает локального экстремума в каждой точке множества M

D функция $f(x)$ достигает наибольшего значения ровно в двух точках множества M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13.1.2 Вторая часть теста

1. Пространство $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму двух ненулевых подпространств L_1 и L_2 размерностей n_1 и n_2 соответственно. Матрица P задает оператор проектирования на L_1 параллельно L_2, матрица Q задает оператор проектирования на L_2 параллельно L_1. Квадратная матрица A размера $2n \times 2n$ определяется равенством

$$A = \begin{pmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

где через I обозначается единичная матрица, а через 0 — нулевая. Обозначим через x, y столбцы длины n. Тогда

а) матрица A ортогональная;

Да Нет

б) матрица A задает оператор проектирования;

Да Нет

в) ранг матрицы A равен $2n_1$;

Да Нет

г) ранг матрицы A равен $2n_2$;

Да Нет

д) ранг матрицы A равен n;

Да Нет

е) если $x \neq 0$ принадлежит образу матрицы P, то $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A;

Да Нет

ж) если $y \neq 0$ принадлежит образу матрицы Q, то $\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A;

Да Нет

з) если $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, где $x \neq y$ и $x \neq -y$, является собственным вектором матрицы A, то $x - y$ является собственным вектором матрицы P или $x+y$ является собственным вектором матрицы Q.

Да Нет

2. Даны функция $f(x, y) = y - 4x^2 + 2x^4$ и множество $M = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в единственной точке;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в единственной точке;

Да Нет

д) в точке $(0, 1)$ функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

е) в точке $(-\sqrt{3}/2, -1/2)$ функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

ж) в точке $(\sqrt{3}/2, -1/2)$ функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

з) точка $(0, -1)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

Да Нет

3. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x - \alpha)^{1/n} e^{-nx}$, где α — вещественный параметр. Обозначим через $M \subset \mathbf{R}$ множество его сходимости и через $f(x)$ — сумму этого ряда для $x \in M$. Тогда

а) для любого α множество M является замкнутым;

Да Нет

б) существует α, для которого множество M является ограниченным;

Да Нет

в) существует α, для которого функция $f(x)$ ограничена сверху на множестве M;

Да Нет

г) для любого α на множестве M ряд не сходится равномерно;

Да Нет

д) если $\alpha < 0$, то на любом интервале $(a, b) \subset M$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

е) если $\alpha > 0$, то на любом интервале $(a, b) \subset M$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

ж) для любого α существует отрезок $[a, b] \subset M$, $a < b$, на котором ряд сходится равномерно;

Да Нет

з) существует α, для которого существует отрезок $[a, b] \subset M$, $a < b$, на котором ряд не сходится равномерно.

Да Нет

4. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot \cos^3 t + f(t),\ x(0) = x_0,$$

где x_0 — вещественный параметр, а $f(t)$ — непрерывная функция, определенная на всей вещественной прямой. Тогда

а) функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) если $f(t)$ ограничена на всей числовой прямой, то $x(t)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

в) если $f(t)$ периодическая с периодом 2π, то и $x(t)$ периодическая с периодом 2π;

Да Нет

г) если $f(\pi/2) = 0$, то и $x(\pi/2) = 0$;

Да Нет

д) если $x_0 = 1$ и $f(t) < 1$ при всех t, то $x(\pi) \leqslant \pi + 1$;

Да Нет

е) если $x_0 = 1$ и $f(t) \equiv 0$, то $x(\pi) = e^{2/3}$;

Да Нет

ж) если $f(t) = e^{\sin t - (\sin^3 t)/3}$, то $x(t)/t \to 0$ при $t \to +\infty$;

Да Нет

з) если $x_0 = \sqrt{e}$ и $f(t) \equiv 0$, то $x(t) \geqslant 1$ для всех $t > 0$.

Да Нет

5. Пусть $a > 0$ и $f(x) = \displaystyle\int_0^a t \cdot |t - x| dt$ при $x \in \mathbf{R}$. Тогда

а) функция $f(x)$ не дифференцируема ровно в одной точке;

Да Нет

б) существует такое число $a > 0$, что функция $f(x)$ не дифференцируема ровно в двух точках;

Да Нет

в) график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту;

Да Нет

г) функция $f(x)$ достигает наименьшего значения на $\mathbf{R}$;

Да Нет

д) существует такое число $a > 0$, что функция $f(x)$ возрастает на множестве $(1, +\infty)$;

Да Нет

е) функция $f(x)$ убывает на множестве $(-\infty, 0)$;

Да Нет

ж) точка $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ является точкой локального минимума функции $f(x)$;

Да Нет

з) функция $f(x)$ является выпуклой функцией на $\mathbf{R}$.

Да Нет

13.2 Ответы и решения теста

13.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. A. **2.** E. **3.** D. **4.** B. **5.** D. **6.** A. **7.** E. **8.** D. **9.** D. **10.** A. **11.** E. **12.** C. **13.** A. **14.** C. **15.** A. **16.** B. **17.** A. **18.** A. **19.** E. **20.** C. **21.** E. **22.** B. **23.** A. **24.** C. **25.** E. **26.** B. **27.** C. **28.** C. **29.** A. **30.** B. **31.** D. **32.** C. **33.** C. **34.** D. **35.** D. **36.** C. **37.** D. **38.** B. **39.** C. **40.** A.

13.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Так как $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму подпространств L_1 и L_2, то $P + Q = I$, откуда следует, что

$$A^2 = \begin{pmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} P^2 & PI + IQ \\ 0 & Q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{pmatrix} = A,$$

и матрица A задает оператор проектирования. Так как $A^T \neq A$, то $A \neq I$, следовательно, A не является ортогональной матрицей (только единичная матрица задает проектор и является ортогональной одновременно). Ответы на вопросы а) — нет, б) — да.

Так как матрица A является блочно-треугольной, то $\det(A - \lambda I) = \det(P - \lambda I)\det(Q - \lambda I)$. Поскольку число 0 является собственным числом матриц P (алгебраической кратности n_2) и Q (алгебраической кратности n_1), то оно является собственным числом матрицы A алгебраической кратности $n_1 + n_2 = n$. Так как алгебраическая кратность собственных чисел проектора совпадает с геометрической, то отсюда следует, что матрица A имеет ранг $2n - n = n$. Ответы на вопросы в) — нет, г) — нет, д) — да.

Если $x \neq 0$ принадлежит образу матрицы P, то $Px = x$ и $Qx = 0$. Отсюда

$$A\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Px + x \\ Qx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ответ на вопрос е) — нет).

Если $y \neq 0$ принадлежит образу матрицы Q, то $Qy = y$ и $Py = 0$. Отсюда

$$A\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Py + y \\ Qy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$$

(ответ на вопрос ж) — да).

Если

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Px + y \\ Qy \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

то y является собственным вектором матрицы Q. При этом возможны два случая:

1. Пусть $Qy = 0$ (и $Py = y$). Тогда $\lambda = 0$ и $0 = Px + y = P(x + y)$, т. е. $x + y$ — собственный вектор матрицы P, а значит и матрицы Q.

2. Пусть $Qy = y$ (и $Py = 0$). Тогда $\lambda = 1$ и $Px + y = x = x + Py$, откуда $P(x - y) = x - y$.

Таким образом, ответ на вопрос з) — да.

Задача 2. Подставим выражение $x^2 = 1 - y^2$ из уравнения для множества M в функцию $f(x, y)$. Получим функцию $g(y) = y - (1 - y^2) + 2(1 - y^2)^2 = 2y^4 + y - 2$. Так как множество M представляет собой окружность радиуса 1 с центром в нуле, то функцию $g(y)$ нужно исследовать на множестве $[-1, 1]$.

Производная $g'(y) = 8y^3 + 1$, откуда следует, что у уравнения $g'(y) = 0$ решение единственное ($y = -1/2 \in [-1, 1]$). Левее этой точки функция $g(x)$ убывает, правее

— возрастает. Поэтому на множестве $[-1, 1]$ у функции $g(y)$ один локальный (он же глобальный) минимум $y = -1/2$ и два локальных максимума $y = -1$ и $y = 1$. Так как $g(-1) = -1$, а $g(1) = 1$, то последняя точка является и точкой глобального максимума. Заметим, что точке $y = -1/2$ соответствуют две точки исходного множества M ($x = -\sqrt{3}/2$, $y = -1/2$ и $x = \sqrt{3}/2$, $y = -1/2$), а точкам $y = -1$ и $y = 1$ — по одной ($x = 0$, $y = -1$ и $x = 0$, $y = 1$).

Таким образом, функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на M в двух точках, а наибольшего — в одной (ответы на вопросы а) — нет, б) — да, в) — да, г — нет). Точка глобального максимума $x = 0$, $y = 1$ (ответ на вопрос д) — да). Точки $x = -\sqrt{3}/2$, $y = -1/2$ и $x = \sqrt{3}/2$, $y = -1/2$ — точки глобального минимума (ответы на вопросы е) — нет, ж) — да). Точка $x = 0$, $y = -1$ — действительно точка локального максимума (ответ на вопрос з) — да).

Задача 3. Точка $\alpha \in M$ и $f(\alpha) = 0$ (все члены ряда равны нулю). Если $x < \alpha$, то $x \notin M$ (четные члены ряда не определены).

Пусть $x > \max\{\alpha, 0\}$, тогда $(x-\alpha)^{1/n} \leqslant \max\{1, x-\alpha\}$, и исходный ряд (с положительными слагаемыми) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-\alpha)^{1/n}e^{-nx}$ сходится, так как мажорируется суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\max\{1, x-\alpha\}\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

Пусть $\alpha < x \leqslant 0$, тогда для всех n выполняется неравенство $(x-\alpha)^{1/n}e^{-nx} \geqslant \min\{x-\alpha, 1\}$ в котором правая часть не стремится к нулю, а значит ряд не сходится.

В итоге получаем $M = [\alpha, +\infty)$ при $\alpha \geqslant 0$ и $M = \alpha \cup (0, +\infty)$ при $\alpha < 0$, поэтому ответы на вопросы а) — нет, б) — нет.

При $\alpha > 0$ и $x \in M$

$$f(x) \leqslant e^{-\alpha}\frac{\max\{1, x-\alpha\}}{e^{x-\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} < \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \frac{1}{1-e^{-\alpha}},$$

откуда следует, что $f(x)$ ограничена, и ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как мажорируется сходящимся числовым рядом. Получаем ответы на вопросы в) — да, г) — нет, е) — да.

Для любого α при $x \in [a, b]$, где $\max\{\alpha, 0\} < a < b$, выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-\alpha)^{1/n}e^{-nx} \leqslant \max\{1, b-\alpha\}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-na},$$

и ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как мажорируется сходящимся числовым рядом, ответ на вопрос ж) — да.

Если $\alpha < 0$ и $x \in (0, 1)$, то остаток ряда

$$R_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty}(x-\alpha)^{1/n}e^{-nx} \geqslant \min\{(x-\alpha)^{1/m}, 1\}\sum_{n=m}^{\infty} e^{-nx} \geqslant$$

$$\geqslant \min\{(-\alpha)^{1/m}, 1\}\frac{e^{-mx}}{1-e^{-x}} \to +\infty \quad \text{при } x \to 0 \text{ справа.}$$

Значит для любого m существует $x \in (0, 1)$, такое, что $R_m(x) > 1$. Это означает, что ряд на интервале $(0, 1)$ не сходится равномерно, т. е. д) — нет.

Если $\alpha = 0$ и $x \in [0, 1]$, то остаток ряда

$$R_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty} x^{1/n} e^{-nx} \geqslant x^{1/m} \sum_{n=m}^{\infty} e^{-nx} = x^{1/m} \frac{e^{-mx}}{1 - e^{-x}} \sim \frac{1}{x^{1-1/m}}$$

при $x \to 0$ справа. Значит для любого $m > 1$ существует $x \in [0, 1]$, такое, что $R_m(x) > 1$. Это означает, что ряд на интервале $[0, 1]$ не сходится равномерно, т. е. з) — да.

Задача 4. Найдем решение данного дифференциального уравнения. Однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x(t) \cdot \cos^3 t$$

может быть легко проинтегрировано, его общим решением является функция $x(t) = C \cdot e^{\sin t - (\sin^3 t)/3}$. Решение исходного уравнения может быть найдено с помощью метода вариации постоянной: если подставить $x(t) = C(t) \cdot e^{\sin t - (\sin^3 t)/3}$ в исходное уравнение, то после упрощения получим

$$\frac{dC}{dt} \cdot e^{\sin t - (\sin^3 t)/3} = f(t),$$

откуда нетрудно вывести решение исходной задачи:

$$x(t) = \left[x_0 + \int_0^t f(\tau) e^{-\sin\tau + (\sin^3 \tau)/3} d\tau \right] e^{\sin t - (\sin^3 t)/3}.$$

Из явного вида решения немедленно следуют ответы на вопросы: а) — да, б) — нет, в) — нет, г) — нет, д) — да (подынтегральное выражение может быть оценено сверху величиной $e^{-\sin\tau + (\sin^3 \tau)/3}$, которая на отрезке $[0, \pi]$ не превосходит единицу), е) — нет (на самом деле тогда $x(\pi) = 1$), ж) — нет (у указанной величины нет предела при $t \to +\infty$), з) — нет (например, $x(3\pi/2) = e^{-1/6}$).

Задача 5. Рассмотрим три случая:

1. Пусть $x \leqslant 0$. Тогда $|t - x| = t - x$ при $t \in [0, a]$ и $f(x) = \int_0^a t(t - x)dt = \frac{a^3}{3} - \frac{a^2 x}{2}$.
2. Пусть $0 < x \leqslant a$. Тогда $f(x) = \int_0^x t(x - t)dt + \int_x^a t(t - x)dt = \frac{x^3}{3} - \frac{a^2 x}{2} + \frac{a^3}{3}$.
3. Пусть $x > a$. Тогда $f(x) = \int_0^a t(x - t)dt = \frac{a^2 x}{2} - \frac{a^3}{3}$.

Отсюда следует, что функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$ и $f'(x) = -a^2/2$ при $x < 0$, $f'(x) = x^2 - a^2/2$ при $0 < x < a$, $f'(x) = a^2/2$ при $x > a$. В точках $x = 0$, $x = a$ производные слева и справа совпадают, значит, функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой. Ответы на вопросы а), б) нет.

Из пунктов 1 и 3 следует, что при $x \leqslant 0$ и при $x \geqslant a$ функция $f(x)$ является линейной, поэтому ответ на вопрос в) да.

Функция $f(x)$ является убывающей на множестве $(-\infty, a/\sqrt{2})$ и возрастающей на множестве $(a/\sqrt{2}, +\infty)$. Значит, в точке $x = a/\sqrt{2}$ функция $f(x)$ достигает наименьшего значения. Кроме того, например, при $a = 1$ функция $f(x)$ возрастает на $(1, +\infty)$. Таким образом, ответы на вопросы г), д), е) да, на вопрос ж) нет.

Поскольку $f''(x) = 2x > 0$ при $0 < x < a$, то на интервале $(0, a)$ функция $f(x)$ является выпуклой. При $x \leqslant 0$ и при $x \geqslant a$ функция $f(x)$ линейна, и графики этих линейных частей являются касательными, проведенными к графику функции $f(x)$ в точках с абсциссами $x = 0$, $x = a$. Поэтому график функции $f(x)$ лежит не ниже любой касательной, проведенной к этому графику. Значит, $f(x)$ является выпуклой функцией. Ответ на вопрос з) да.

14 Вступительный экзамен 2013 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

14.1 Тест

14.1.1 Первая часть теста

1. Пусть M — счетное множество на числовой прямой, $P = \mathbf{R} \setminus M$ — дополнение множества M. Тогда

A у множества P существует внутренняя точка

B у множества P существует внешняя точка

C у множества P существует изолированная точка

D у множества P существует граничная точка

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Неопределенный интеграл $\int \frac{x^4}{1-x^4}dx$ равен

A $\quad -x - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$

B $\quad -x - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$

C $\quad -x + \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arctg} x^2 + C$

D $\quad -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C$

E семейству функций, отличному от перечисленных в A, B, C, D

3. Пусть M — подмножество числовой прямой и P — множество его изолированных точек. Тогда

A множество P непустое

B множество P открытое

C множество P замкнутое

D множество P ограниченное

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Для подмножества M числовой прямой обозначим через ∂M множество его граничных точек, а через $\overline{M}$ — его замыкание. Тогда

A $\quad \partial(M \cup N) = \partial M \cup \partial N$

B $\quad \overline{M \cap N} = \overline{M} \cap \overline{N}$

C если множество M не содержит изолированных точек, то ∂M совпадает с множеством предельных точек множества M

D $\quad M = \overline{M} \setminus \partial M$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Неопределенный интеграл $\int \frac{x^4}{x+1}\,dx$ равен

A $\quad -\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| + C$

B $\quad \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$

C $\quad \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| + C$

D $\quad \frac{(x+1)^4}{4} - x + \ln|x+1| + C$

E семейству функций, отличному от перечисленных в A, B, C, D

6. Пусть A, B — ограниченные подмножества числовой прямой, $A+B=\{x+y, x\in A, y\in B\}$, $A-B=\{x-y, x\in A, y\in B\}$, $A\cdot B=\{x\cdot y, x\in A, y\in B\}$. Тогда

A $\quad \sup(A\cdot B)=\sup A\cdot\sup B$

B $\quad \inf(A\cdot B)=\inf A\cdot\inf B$

C $\quad \sup(A-B)=\sup A-\inf B$

D $\quad \sup(A+B)=\sup A+\inf B$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Последовательность $\{x_n, n=1,2,\ldots\}$ задана рекуррентно:

$$x_1=a,\quad x_{n+1}=\sqrt{5+x_n},\ n=1,2,\ldots,$$

где $a\geqslant 0$. Тогда

A $\quad$ при любом $a\geqslant 0$ последовательность $\{x_n, n=1,2,\ldots\}$ строго возрастает

B $\quad$ существует такое $a\geqslant 0$, что последовательность $\{x_n, n=1,2,\ldots\}$ не ограничена

C $\quad$ существуют такие числа a_1, $a_2\geqslant 0$, что соответствующие последовательности $\{x_n, n=1,2,\ldots\}$ сходятся к разным пределам

D $\quad$ при любом $a\geqslant 0$ последовательность $\{x_n, n=1,2,\ldots\}$ имеет предел

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^n$. Обозначим через M множество его сходимости и через $S(x)$, $x\in M$, его сумму. Тогда

A $\quad$ множество M замкнутое

B $\quad$ множество M ограниченное

C $\quad$ функция $S(x)$ является неограниченной функцией

D $\quad$ интервал $(4,5)\subset M$ и на $(4,5)$ ряд сходится равномерно

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Даны функция двух переменных $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ и множество $M=\{(x,y)\colon x^2+y^2=2\}$. Тогда

A $\quad$ функция $f(x,y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в единственной точке

B функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в единственной точке

C точка $(1, 1)$ есть точка локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M

D точка $(0, -\sqrt{2})$ есть точка локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(2-\dfrac{x}{2}\right)^{1/(x^3-8)}$ равен

A $\dfrac{1}{\sqrt[24]{e}}$

B $\sqrt[24]{e}$

C $\dfrac{1}{\sqrt[12]{e}}$

D $\sqrt[6]{e}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

11. Концы стержня AB, длина которого равна 5 м, закреплены на двух взаимно перпендикулярных направляющих и могут скользить по ним. Пусть O — точка пересечения направляющих. Точка A движется от точки O с постоянной скоростью 1 м/с. Чему равно абсолютное значение скорости точки B в момент времени, когда длина отрезка AO равна 3 м?

A 0.50 м/с

B 0.75 м/с

C 1.00 м/с

D 1.25 м/с

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

12. Предел $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{2x}(\sin t)^t\,dt$ равен

A 1

B 2

C 3

D 4

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

13. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\left(\sqrt[7]{n^7+7n^6}-\sqrt{n^2+2n}\right)$ равен

A -1

B $-5/2$

C -4

D -5

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

14. $\sup\limits_{|x|\leqslant 1}\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg} x^n$ равен

A $-\pi/4$

B $\pi/4$

C 1

D $\pi/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

15. Область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n - x^{4n}\right)\sin(xn)$ равна

A $(-1, 1)$

B $[-1, 1)$

C $(-1, 1]$

D $[-1, 1]$

E множеству, отличному от перечисленных в A, B, C, D

16. Числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел. Тогда

A последовательность $\{(-1)^n|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

B последовательность $\{(-1)^n a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

C последовательность $\{\sqrt{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

D последовательность $\{a_n + k(n-k)a_{n-k}\}_{n=k+1}^{\infty}$ сходится при некотором натуральном k

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\left(1+x/2+x^2/4\right)}{x^2}$ равен

A $-1/4$

B 1/4

C $-1/8$

D 1/8

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

18. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{2n+3k}{n}\right)^2$ равен

A 0

B 30

C 39

D 62

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

19. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, не постоянная и четная, а функция $g(x)$ определена на всех числовой оси, не постоянная и периодическая. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Существуют функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что функция $f(x)g(x)$ периодическая.

II. Функция $f(x) + xg(x)$ не периодическая.

III. Функция $f(x) + g(x) + x$ не является четной.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

20. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$, не убывает и принимает на нем значения между нулем и единицей. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Решения уравнения $f(x) = x$ существуют, и их конечное число.

II. Если $f(1) = 1$, то у уравнения $f(x) = x$ существует не менее двух решений.

III. Если $f(f(x))$ непрерывна, то и $f(x)$ непрерывна.

A только I

B — только II

C — только III

D — только I и II

E — все утверждения I, II, III ложные

21. Пусть функция двух переменных задана следующим образом:

$$f(x, y) = \begin{cases} a + 2x^2 - b(y - c), & \text{если } x^2 > 2 + x \text{ и } y < 6, \\ 3 + cx - y, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эта функция является непрерывной на всей плоскости, если

A — $a = 3, b = 1, c = 2$

B — $a = 3, b = 0, c = 2$

C — $a = 2, b = 0, c = 1$

D — $a = -3, b = 1, c = 2$

E — таких значений параметров не существует

22. Пусть $f(x) = -\exp\left(-\frac{a}{x}\right) + 1 - \frac{a}{x}$, где $a > 0$. Тогда

A — функция $f(x)$ отрицательна при всех $x > 0$

B — функция $f(x)$ отрицательна при всех $x > 0$, если $a > 1$, и только при таких значениях параметра a

C — функция $f(x)$ отрицательна при всех $x > 0$, если $0 < a \leqslant 1$, и только при таких значениях параметра a

D — функция $f(x)$ положительна при всех $x > 0$

E — все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Пусть функция $f(x)$ имеет единственную точку разрыва на числовой прямой $\mathbf{R}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. У функции $f(x)$ существует первообразная, являющаяся всюду непрерывной функцией.

II. Существует функция $f(x)$, у которой в точке разрыва существует производная.

III. Множество значений функции $f(x)$ является выпуклым множеством.

A — только I

B только II

C только III

D только I и III

E все утверждения I, II, III ложные

24. Функции $f(x), g(x)$ определены и непрерывны на числовой прямой $\mathbf{R}$, и не равны тождественно нулю. Пусть точка $x_0 \in \mathbf{R}$. Тогда

A если у функции $f(x)$ существует производная в точке x_0, а у функции $g(x)$ не существует производной в точке x_0, то у функции $f(x)g(x)$ не существует производной в x_0

B если у функции $f(x)$ не существует производной в точке x_0, и у функции $g(x)$ не существует производной в точке x_0, то у функции $f(x)g(x)$ не существует производной в x_0

C если у функции $f(x)$ существует производная в точке x_0, то у функции $f(x)$ существует производная в некоторой окрестности точки x_0

D если у функций $f(x), g(x)$ существуют производные в точке x_0, то у функции $f(g(x))$ существует производная в точке x_0

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Пусть функция $f(x)$ определена на всей вещественной прямой и обладает свойством: $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^{\alpha}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если $\alpha > 1$, то функция $f(x)$ постоянная.

II. Если $\alpha = 1$, то функция $f(x)$ дифференцируемая.

III. Если $0 < \alpha < 1$, то функция $f(x)$ непрерывная.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

26. Неявная функция $y(x)$ задана уравнением $x^2 + xy - y^2 = x$ в окрестности точки $x = 1$, $y = 0$. Тогда ее производная в точке $x = 1$

A равна -1

B равна 0

C равна 1

D не существует

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

27. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = y^2x^3$, $y(0) = 8$. Тогда значение $y(1)$ равно

A $1/8$

B $8/3$

C 8

D -8

E другому числу или не существует

28. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \dfrac{y}{\cos x}$, $y(0) = 2$ на своей области определения

A не имеет нулей

B имеет ровно один ноль

C имеет ровно два нуля

D имеет ровно четыре нуля

E имеет более четырех нулей

29. Функция $f(x)$ определена на интервале $(-1, 1)$ и дважды дифференцируема в каждой точке $(-1, 1)$. Тогда

A если функция $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значения на $(-1, 1)$, то уравнение $f'(x) = 0$ имеет не менее двух решений

B если существует точка $x^* \in (-1, 1)$ такая, что $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) < 0$, то функция $f(x)$ достигает наибольшего значения

C если существует точка $x^* \in (-1, 1)$ такая, что $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) > 0$, то функция $f(x)$ достигает наибольшего значения

D если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает либо наибольшего, либо наименьшего значения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Функция $f(x, y) = \sin(\pi xy)$ на множестве $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$

A	достигает наибольшего значения в единственной точке

B	достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C	достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

D	достигает наибольшего значения в восьми точках

E	не достигает наибольшего значения

31. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0, 1]$, при этом $f(x)$ принимает не менее двух значений. Тогда

A	множество точек, в которых $f(x)$ достигает наибольшего значения, не может быть открытым

B	множество точек, в которых $f(x)$ достигает наибольшего значения, не может быть замкнутым

C	если множества точек, в которых $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значения, оба конечны, то количества элементов в них различаются не более чем на 1

D	если $f(0) = f(1)$, то функция $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значения на интервале $(0, 1)$

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Функция $f(x, y)$ определена в окрестности точки $(0, 0)$. Тогда

A	если для любого t функция $g(x) = f(x, tx)$ непрерывна в точке $x = 0$, то функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$

B	если для любого t функция $g(x) = f(x, tx)$ дифференцируема в точке $x = 0$, то функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(0, 0)$

C	если функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$, то функция $h(x, y) = xyf(x, y)$ дифференцируема в точке $(0, 0)$

D	если функция $u(x, y) = \sin f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$, то и функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

33. Дана система векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$, $m \geqslant 2$, в пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$. Известно, что вектор x_{m+1} линейно выражается через $x_1, \ldots, x_m$. Через $\mathscr{L}(z_1, \ldots, z_k)$ обозначается линейная оболочка системы векторов $\{z_1, \ldots, z_k\}$, а через $\dim \mathscr{L}(z_1, \ldots, z_k)$ — ее размерность. Тогда

A	система $\{x_1, \ldots, x_m\}$ линейно зависимая

B $\quad \dim \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_m) = m$

C $\quad \dim \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_{m+1}) = m$

D $\quad$ если система $\{x_1, \ldots, x_{m+1}\}$ линейно независимая, то $\dim \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_{m+1}) \leqslant m$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

34. Пусть L_1 — множество решений системы $Ax = 0$, L_2 — множество решений системы $Bx = 0$, где A и B — матрицы размера $m \times n$ (m, $n \geqslant 2$), а x — неизвестный столбец подходящей длины. Тогда

A $\quad L_1 \cap L_2$ — множество решений системы $A^{\mathsf{T}}Bx = 0$ (через A^{T} обозначается матрица, транспонированная к A)

B $\quad L_1 \cap L_2$ — множество решений системы $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$

C $\quad L_1 \cap L_2$ — множество решений системы $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} x = 0$

D $\quad L_1 \cap L_2$ — множество решений системы $(A + B)x = 0$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

35. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Через $\det X$ обозначим определитель матрицы X. Тогда

A $\quad$ если $\det(AB) = \det(BA)$, то $AB = BA$

B $\quad$ если $A^2 = B^2$, то $A = B$ или $A = -B$

C $\quad$ если $(A - B)^2 = 0$, то $A = B$

D $\quad$ если $\det A = \det B \neq 0$, то матрица AB^{-1} ортогональная

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Дан *нильпотентный* линейный оператор $\mathbf{A}$, действующий из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 2$ (т. е. $\mathbf{A}^m = 0$ для некоторого $m \geqslant 1$). Через $\operatorname{Ker} \mathbf{X}$ и $\operatorname{Im} \mathbf{X}$ обозначим ядро и образ оператора $\mathbf{X}$ соответственно. Найдите ***ложное*** утверждение

A $\quad \dim \operatorname{Ker} \mathbf{A} > 0$

B $\quad$ если $\mathbf{A} \neq 0$, то $\dim \operatorname{Ker} \mathbf{A}^2 > \dim \operatorname{Ker} \mathbf{A}$

C $\quad \mathbf{A}^n = 0$

D $\quad$ пространство $\mathbf{R}^n$ распадается в сумму подпространств $\operatorname{Ker} \mathbf{A}$ и $\operatorname{Im} \mathbf{A}$

E $\quad$ среди утверждений A, B, C, D есть ложное

37. Число инвариантных подпространств матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

равно

- A 1
- B 2
- C 3
- D 4
- E бесконечно много

38. Пусть A — симметричная матрица третьего порядка, а x — неизвестный столбец длины 3. Тогда

- A если множество $\{x\colon x^T A x = a\}$ неограничено при всех $a \in \mathbf{R}$, то матрица A знакопеременная (не является ни положительно, ни отрицательно полуопределенной)
- B если множество $\{x\colon x^T A x = a\}$ ограничено при всех $a \in \mathbf{R}$, то матрица A положительно определенная
- C если множество $\{x\colon x^T A x = a\}$ при всех $a \geqslant 0$ содержит в себе прямую, то матрица A положительно полуопределенная
- D уравнение $x^T A x = a$ имеет решение при всех $a \in \mathbf{R}$
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

39. Дана квадратная матрица A порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $A^2 = I$, где I — единичная матрица. Пусть $L_1 = \{x \in \mathbf{R}^n\colon Ax = x\}$ и $L_{-1} = \{x \in \mathbf{R}^n\colon Ax = -x\}$. Тогда

- A Числа 1 и -1 оба являются собственными числами матрицы A
- B подпространства L_1 и L_{-1} ортогональны друг другу при стандартном скалярном произведении в $\mathbf{R}^n$
- C пространство $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму L_1 и L_{-1}
- D матрица A симметричная
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

40. Пусть P и Q — квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, задающие проекторы на одно и то же подпространство $L \subset \mathbf{R}^n$. Через $\operatorname{Ker} X$ и $\operatorname{Im} X$ обозначим ядро и образ оператора, заданного матрицей X, соответственно. Найдите ***ложное*** утверждение

A $PQ = Q$

B $QP = P$

C $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} Q$

D $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} Q$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

14.1.2 Вторая часть теста

1. Пусть $f(x) = \int_{4x}^{x^2+3} e^{-t^2} dt$, где $x \in \mathbf{R}$. Тогда

а) при всех $x \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant 0$;

Да Нет

б) уравнение $f(x) = 0$ имеет четное число корней;

Да Нет

в) функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на $\mathbf{R}$;

Да Нет

г) функция $f(x)$ достигает наименьшего значения на $\mathbf{R}$;

Да Нет

д) функция $f(x)$ имеет локальный минимум, который принадлежит интервалу $(1, 3)$;

Да Нет

е) функция $f(x)$ не убывает на множестве $[3, +\infty)$;

Да Нет

ж) график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту с ненулевым углом наклона;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту.

Да Нет

2. Для семейства функций $f(x) = |x|^\gamma$, $\gamma \in \mathbf{R}$, рассмотрим предел

$$\lim_{\mu \to 0} \left\{ \lim_{\nu \to 0} \frac{f(\mu + \nu + x) - f(\mu + x) - f(\nu + x) + f(x)}{\mu\nu} \right\}.$$

Обозначим через $M \subset \mathbf{R}$ множество, где он существует и конечен, и через $g(x)$ — его значение для $x \in M$. Тогда а) существуют более одного значения γ, при которых $g(x) \equiv 0$ на M;

Да Нет

б) существуют более одного значения γ, при которых $g(x) \equiv \gamma$ на M;

Да Нет

в) если $g(x) \not\equiv \gamma$ на M, то число решений уравнения $g(x) = \gamma$ на M четное;

Да Нет

г) существуют более одного значения γ, при которых $g(x) > 0$ на M;

Да Нет

д) существуют более одного значения γ, при которых $g(x)$ не ограничена на M;

Да Нет

е) существуют более одного значения γ, при которых $M = \mathbf{R}$;

Да Нет

ж) существуют более одного значения γ, при которых $M \neq \mathbf{R}$;

Да Нет

з) если $\gamma = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}$, то $g(x)$ не равно 0 ни в одной точке M.

Да Нет

3. Даны функция $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2|x|y^3$ и множество $M = \{(x, y)\colon |x| + y^2 = 1\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ не достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в единственной точке $\left(1/2, 1/\sqrt{2}\right)$;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в точке $(16/25, -3/5)$;

Да Нет

д) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

е) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в одной точке;

Да Нет

ж) точка $(0, -1)$ является точкой локального минимума функцим $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) точка $(1, 0)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

Да Нет

4. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{\sqrt{16 - t^2}}, \quad x(0) = x_0,$$

где x_0 — вещественный параметр. Тогда

а) существует x_0 такое, что функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) при любом x_0 функция $x(t)$ определена в точке $t = 3$;

Да Нет

в) существует $x_0 \neq 0$ такое, что функция $x(t)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

г) при любом $x_0 \neq 0$ функция $x(t)$ монотонно возрастает на своей области определения;

Да Нет

д) для любого $\tau > 0$ существует $x_0 > 0$ такое, что $x(t)$ не определена в точке τ;

Да Нет

е) если $x_0 > 1$ и $x(t)$ определена в точке $t = 2$, то $x(2) > 2$;

Да Нет

ж) существует $x_0 \neq 0$ такое, что функция $x(t) - x_0$ является нечетной;

Да Нет

з) если $x_0 < 1$, то $x(t)$ определена в точке $t = 7/2$.

Да Нет

5. Три вектора

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \\ 1+\alpha \end{pmatrix},$$

являются собственными векторами симметричной матрицы A третьего порядка. Известно, что

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+5\alpha \\ 1+2\alpha \\ 2-5\alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда

а) при $\alpha = 1$ матрица A является матрицей проектирования на одномерное подпространство;

Да Нет

б) при $\alpha = 1$ матрица A является матрицей проектирования на двумерное подпространство;

Да Нет

в) при $\alpha = 1$ матрица A является ортогональной матрицей;

Да Нет

г) при $\alpha = 0$ матрица A является матрицей проектирования на одномерное подпространство;

Да Нет

д) при $\alpha = 0$ матрица A является матрицей проектирования на двумерное подпространство;

Да Нет

е) при $\alpha = -1$ существует бесконечно много матриц A;

Да Нет

ж) при $\alpha = -1$ существует единственная матрица A;

Да Нет

з) при $\alpha = -1$ не существует матрицы A.

Да Нет

14.2 Ответы и решения теста

14.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. D. **2.** A. **3.** E. **4.** E. **5.** B. **6.** C. **7.** D. **8.** C. **9.** C. **10.** A. **11.** B. **12.** B. **13.** D. **14.** B. **15.** E. **16.** C. **17.** D. **18.** C. **19.** C. **20.** E. **21.** E. **22.** A. **23.** E. **24.** E. **25.** C. **26.** A. **27.** E. **28.** A. **29.** A. **30.** B. **31.** A. **32.** C. **33.** D. **34.** B. **35.** E. **36.** D. **37.** B. **38.** A. **39.** C. **40.** D.

14.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Для начала заметим, что подынтегральная функция положительная и непрерывная на всем $\mathbf{R}$. Поэтому

$$
\begin{aligned}
f(x) > 0 &\iff x^2 + 3 > 4x \iff x \notin [1,3],\\
f(x) = 0 &\iff x^2 + 3 = 4x \iff x \in \{1,3\},\\
f(x) < 0 &\iff x^2 + 3 < 4x \iff x \in (1,3).
\end{aligned}
$$

Таким образом, $f(x) = 0$ в двух точках $x = 1$ и $x = 3$, вопрос б) — да. При $x \in (1,3)$ функция $f(x) < 0$, поэтому вопрос а) — нет.

Так как $f(x) \leqslant 0 \iff x \in [1,3]$ и функция $f(x)$ непрерывна, то она достигает наименьшего значения на $[1,3]$, и это значение является наименьшим значением на всем $\mathbf{R}$ (вопрос г) — да). Достигается оно внутри отрезка (где значения функции отрицательные), и так как глобальный минимум является локальным, то д) — да.

Теперь заметим, что если $x > 0$, то $f(-x) > f(x)$ (поскольку подынтегральная функция положительная и $[4(-x), 3(-x)^2 + 3] \supset [4x, 3x^2 + 3]$). Поэтому при $x > 0$ наибольшее значение достигаться не может. Если же $x \leqslant 0$, то

$$
f'(x) = 2xe^{-(x^2+3)^2} - 4e^{-(4x)^2} < 0,
$$

что означает, что $f(x)$ убывающая, и локальных, а значит и глобальных максимумов при $x \leqslant 0$ у нее нет. Поэтому вопрос в) — нет.

Далее, поскольку подынтегральная функция e^{-t^2} очень быстро стремится к нулю при $t \to \pm\infty$, то $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ (так как оба предела интегрирования стремятся к $+\infty$) и $f(x) \to A > 0$ при $x \to -\infty$ (здесь нижний предел стремится к $-\infty$, а верхний — к $+\infty$). Поэтому у функции $f(x)$ есть две горизонтальные асимптоты и нет наклонных (вопросы ж) — нет, з) — да).

Если же предположить, что $f(x)$ не убывает на $[3, +\infty)$, то так как при $x > 3$ функция $f(x) > 0$, то и предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$ (предел неубывающей ограниченной функции). Это вступает в противоречие с тем, что предел на самом деле равен нулю (вопрос е) — нет).

Задача 2. Заметим, что предел в условии задачи является определением второй производной, соответственно, множество M — множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых существует $f''(x)$. Для заданной функции $f(x)$ вторая производная равна $g(x) = f''(x) = \gamma(\gamma - 1)|x|^{\gamma-2}$ при $x \in M$.

При $\gamma \in \{0, 1\}$, $g(x) \equiv 0$ на M, поэтому а) — да.

При $\gamma = 0$, $g(x) \equiv 0$ на $M = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, при $\gamma = 2$, $g(x) \equiv 2$ на $M = \mathbf{R}$. Поэтому б) — да.

При всех $\gamma \geqslant 2$ вторая производная существует на всей прямой, то есть $M = R$. Поэтому е) — да.

При всех $\gamma \leqslant 0$ сама функция $f(x)$, а значит и ее вторая производная не существует в нуле, поэтому $M \neq \mathbf{R}$ и ж) — да.

Заметим, что при $\gamma \notin \{0, 1\}$ функция $g(x)$ может равняться нулю только в точке $x = 0$. Поэтому при всех $\gamma < 0$ и $x \in M$ $g(x) > 0$, а значит г) — да.

При всех $\gamma > 2$ вторая производная существует на всей прямой и не ограничена. Поэтому д) — да.

Если $\gamma = 1$, то $g(x) \equiv 0$ на M, поэтому з) — нет.

Наконец заметим, что $g(x)$ — четная функция, поэтому количество ненулевых решений уравнения $g(x) = \gamma$ на M четно. Нулевое решение могло бы быть возможно только при $\gamma = g(0) = 0$, однако тогда $M = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ и $g(x) \equiv 0$ на M, поэтому в) — да.

Задача 3. Выразим $|x| = 1 - y^2$ из определения множества M и подставим в функцию $f(x, y)$:

$$g(y) = (1 - y^2)^2 + 2y^2 + 2(1 - y^2)y^3 = -2y^5 + y^4 + 2y^3 + 1,$$

где $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Исследуем функцию $g(y)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Возьмём производную и посмотрим, в каких точках $g'(y)$ обращается в ноль:

$$g'(y) = -10y^4 + 4y^3 + 6y^2 = 2y^2(3 + 2y - 5y^2) = 2y^2(1 - y)(3 + 5y).$$

Это означает, что точки, которые могут быть экстремумами функции $f(x, y)$ — это $y = 0, x = \pm 1$, $y = 1, x = 0$ и $y = -3/5, x = \pm 16/25$. Также возможно, что существует экстремум на границе области определения $[-1, 1]$ функции $g(y)$, то есть в точке $y = -1, x = 0$ для функции $f(x, y)$.

Вторая и третья производные функции $g(y)$ равны

$$g''(y) = -40y^3 + 12y^2 + 12y = 4y(3 + 3y - 10y^2),$$
$$g'''(y) = -120y^2 + 24y + 12 = 12(1 + 2y - 10y^2).$$

Найдем знаки второй производной функции $g(y)$ в точках экстремума, знак третьей производной в точке $(1, 0)$, а также значения функции $g(y)$ в этих точках:

$$g''(0) = 0,\ g'''(0) > 0,\ g''\left(-\frac{3}{5}\right) > 0,\ g''(1) < 0,\ g''(-1) > 0,$$
$$g(0) = 1,\ g\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{2666}{3125} \approx 0.853,\ g(1) = 2,\ g(-1) = 2.$$

Следовательно, точки $y = 0, x = \pm 1$ не являются точками локального экстремума функции $f(x, y)$, точки $y = \pm 1, x = 0$ являются точками локального и глобального максимума функции $f(x, y)$, точки $y = -3/5, x = \pm 16/25$ являются точками локального и глобального минимума функции $f(x, y)$. Отсюда следуют ответы на вопросы задачи: а) нет, б) нет, в) да, г) да, д) да, е) нет, ж) нет, з) нет.

Задача 4. Правая часть дифференциального уравнения не определена при $t \geqslant 4$, так что никакое решение задачи Коши не может быть определено при всех t (ответ на вопрос а) — нет).

Найдем решение данной задачи Коши. Поскольку переменные разделяются, имеем

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dt}{\sqrt{16 - t^2}},$$

откуда

$$-\frac{1}{x} + C = \arcsin\frac{t}{4},$$

так что

$$x(t) = \frac{1}{1/x_0 - \arcsin(t/4)}.$$

Видно, что при $x_0 > 1/\arcsin(3/4)$ знаменатель обращается в ноль при подходящем $t < 3$ (ответ на вопрос б) — нет). Напротив, при малых x_0 (меньших $2/\pi$) знаменатель положителен и отделен от нуля при всех $t < 4$, так что решение ограничено (ответ на вопрос в) — да). Положительный ответ на вопрос г) следует из явного вида решения задачи Коши. Ответ на вопрос д) — да (достаточно выбрать $x_0 = 1/\arcsin(\tau/4)$). Далее, для того, чтобы было определено $x(2)$, требуется $x_0 < 2/\pi < 1$ и значит посылка в утверждении е) никогда не выполнена, таким образом, ответ на вопрос е) — да. Из явного вида функции $x(t)$ имеем

$$x(t) - x(0) = \frac{x_0^2 \arcsin(t/4)}{1 - x_0 \arcsin(t/4)},$$

так что ответ на вопрос ж) — нет. Наконец, нетрудно видеть, что при $x_0 = 3/\pi < 1$ решение задачи Коши существует только при $t < 2\sqrt{3} < 7/2$, так что ответ на вопрос з) — нет.

Задача 5. Пусть $\alpha = 1$. Тогда $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Заметим, что все три вектора попарно ортогональны, поэтому они образуют базис и могут соответствовать разным собственным числам матрицы A. Обозначим эти собственные числа через λ_1, λ_2 и λ_3 соответственно. Разложим вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ по базису x_1, x_2, x_3. Получим $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + x_3$.

Следовательно,

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = Ax_1 + Ax_2 + Ax_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 =$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решив эту систему, получаем $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, откуда следует, что матрица A ортогональная (вопросы а) нет, б) нет, в) да).

Пусть $\alpha = 0$. Тогда $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Заметим, что в этом случае векторы образуют базис, и вектор x_2 ортогонален x_1 и x_3, но x_1 и x_3 между собой не ортогональны. Поэтому векторы x_1 и x_3 соответствуют одному собственному числу (обозначим его через λ_1), а на собственное число, которому соответствует x_2, ограничений нет (обозначим его через λ_2). Разложим вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ по базису x_1, x_2, x_3. Получим $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} =$ $= 3x_1 + x_2 + 3x_3$. Следовательно,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 3Ax_1 + Ax_2 + 3Ax_3 = 3\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + 3\lambda_1 x_3 =$$
$$= 3\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решив эту систему, получаем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, откуда следует, что матрица A задает проектор на одномерное подпространство, порожденное вектором x_2 (вопросы г) да, д) нет).

Пусть $\alpha = -1$. Тогда $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Аналогично случаю $\alpha =$ $= 0$ векторы образуют базис, и вектор x_2 ортогонален x_1 и x_3, но x_1 и x_3 между собой не ортогональны. Поэтому векторы x_1 и x_3 соответствуют одному собственному числу (обозначим его через λ_1), а на собственное число, которому соответствует x_2, ограничений нет (обозначим его через λ_2). Разложим вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ по базису x_1, x_2, x_3. Получим $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} =$

$= -3x_1 + x_2 - 3x_3$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
A\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} &= -3Ax_1 + Ax_2 - 3Ax_3 = -3\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - 3\lambda_1 x_3 = \\
&= -3\lambda_1\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} - 3\lambda_1\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix}3\lambda_1 - 2\lambda_2\\ \lambda_2\\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-1\\7\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Нетрудно видеть, что эта система не имеет решений (вопросы е) нет, ж) нет, з) да).

15 Вступительный экзамен 2014 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

15.1 Тест

15.1.1 Первая часть теста

1. Функция $f(x)$ определена на $\mathbf{R}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$, то ее график замкнут в $\mathbf{R}^2$.

II. Если $f(x)$ имеет разрыв первого рода на $\mathbf{R}$, то ее график незамкнут в $\mathbf{R}^2$.

III. Если $f(x)$ имеет разрыв второго рода на $\mathbf{R}$, то ее график незамкнут в $\mathbf{R}^2$.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

2. Пусть A — счетное подмножество $\mathbf{R}$. Тогда

A множество внутренних точек A счетное

B множество граничных точек A счетное

C множество внешних точек A не более, чем счетное

D множество внешних точек A имеет мощность континуума

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Пусть A_1, A_2, ...— подмножества вещественной прямой $\mathbf{R}$. Тогда

A если среди множеств A_n есть хотя бы одно открытое, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ открытое

B если среди множеств A_n есть хотя бы одно замкнутое, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ замкнутое

C если все множества A_n открытые, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ открытое

D если все множества A_n замкнутые, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ замкнутое

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Пусть A и B — непустые ограниченные подмножества $\mathbf{R}$. Обозначим через $A - B$ множество $\{x - y\colon x \in A, y \in B\}$, а через $\sup X$ и $\inf X$ — точную верхнюю и точную нижнюю грань множества X соответственно. Найдите *ложное* утверждение

A если $\sup A > \sup B$, то $\sup(A - B) > 0$

B если $\sup A < \sup B$, то $\sup(A - B) < 0$

C если $\sup A > \inf B$, то $\sup(A - B) > 0$

D если $\sup A < \inf B$, то $\sup(A - B) < 0$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

5. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ — две системы векторов в $\mathbf{R}^N$, где $N \geqslant 2$, а L_X и L_Y — их линейные оболочки соответственно. Тогда

A если сумма $L_X + L_Y$ прямая, то системы X и Y линейно независимые

B если системы X и Y линейно независимые, то сумма $L_X + L_Y$ прямая

C если объединенная система $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n\}$ линейно независимая, то сумма $L_X + L_Y$ прямая

D если объединенная система $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n\}$ линейно зависимая, то сумма $L_X + L_Y$ не прямая

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Пусть A — матрица $m \times n$, B — матрица $n \times m$, где $n, m \geqslant 2$, x — столбец длины n, y и b — столбцы длины m. Через A^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице A. Тогда

A система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда совместна система $BAx = Bb$

B система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда совместна система $A^T Ax = A^T b$

C система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда совместна система $ABy = b$

D система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда совместна система $AA^T y = b$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Пусть A и B — ортогональные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $\det A = 1$, $\det B = -1$, где через $\det X$ обозначается определитель квадратной матрицы X. Тогда

A при любом $\lambda \in [0, 1]$ матрица $\lambda A + (1 - \lambda)B$ ортогональная

B при любом $\lambda \in [0, 1]$ матрица $\lambda A + (1 - \lambda)B$ невырожденная

C существует $\lambda \in [0, 1]$, при котором матрица $\lambda A + (1 - \lambda)B$ задает оператор проектирования

D существует $\lambda \in [0, 1]$, при котором матрица $\lambda A + (1 - \lambda)B$ вырожденная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — линейные операторы из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$, где $n, m \geqslant 2$. Обозначим через $\operatorname{Ker} \mathbf{X}$ и $\operatorname{Im} \mathbf{X}$ ядро и образ оператора $\mathbf{X}$ соответственно. Тогда

A $\operatorname{Im}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \subset \operatorname{Im} \mathbf{A} + \operatorname{Im} \mathbf{B}$

B $\operatorname{Im}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \supset \operatorname{Im} \mathbf{A} \cap \operatorname{Im} \mathbf{B}$

C $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \subset \operatorname{Ker} \mathbf{A} \cap \operatorname{Ker} \mathbf{B}$

D $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \subset \operatorname{Ker} \mathbf{A} + \operatorname{Ker} \mathbf{B}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$, для которой выполнено равенство $A^2 + 2A = 0$. Тогда

A матрица A вырожденная

B у матрицы A существует положительное собственное число

C у матрицы A существует отрицательное собственное число

D матрица $-A$ задает оператор проектирования

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Пусть A и B — симметричные положительно определенные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $A \neq B$ и $\det A = \det B$, где через $\det X$ обозначается определитель квадратной матрицы X. Обозначим также через x^T транспонированный столбец x. Тогда

A множество $\{x \in \mathbf{R}^n : x^T(A - B)x = 1\}$ пустое

B множество $\{x \in \mathbf{R}^n : x^T(A - B)x = 1\}$ непустое ограниченное

C множество $\{x \in \mathbf{R}^n : x^T(A - B)x = 1\}$ неограниченное, не совпадающее с $\mathbf{R}^n$

D множество $\{x \in \mathbf{R}^n : x^T(A - B)x = 1\}$ — все пространство $\mathbf{R}^n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Определим в $\mathbf{R}^n$ стандартное скалярное произведение и обозначим через A^T матрицу, транспонированную к A. Тогда

A если A^TA задает ортопроектор в стандартном базисе, то A тоже задает ортопроектор в стандартном базисе

B если A задает ортопроектор в стандартном базисе, то A^TA тоже задает ортопроектор в стандартном базисе

C если A^TA задает проектор в стандартном базисе, то A тоже задает проектор в стандартном базисе

D если A задает проектор в стандартном базисе, то A^TA тоже задает проектор в стандартном базисе

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Пусть A — симметричная матрица порядка $n \geqslant 2$. Известно, что для любого столбца $x \in \mathbf{R}^n$ выполняется равенство $x^TAx = 0$ (здесь через x^T обозначена строка, транспонированная к x). Тогда

- A матрица A невырожденная
- B матрица A ортогональная
- C матрица A задает ортопроектор в стандартном базисе при стандартном скалярном произведении
- D матрица A задает проектор, но не ортопроектор, в стандартном базисе при стандартном скалярном произведении
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = (y^2 + 1)x$, $y(0) = 0$. Тогда значение $y(\pi)$ равно

- A 0
- B 1
- C $\operatorname{arctg} \sqrt{\pi}$
- D $\operatorname{tg} \dfrac{\pi^2}{2}$
- E другому числу или не определено

14. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \dfrac{y}{x^2}$, $y(1) = 1$ на своей области определения

- A не имеет нулей
- B имеет ровно один ноль
- C имеет ровно два нуля
- D имеет ровно четыре нуля
- E имеет более четырех нулей

15. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены для всех вещественных чисел, причем функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$ непрерывны в каждой точке. Тогда

- A функция $f(g(f(x)))$ непрерывна в каждой точке
- B функция $g(f(g(x)))$ дифференцируема в каждой точке
- C функция $f^2(x) + g^2(x)$ непрерывна в каждой точке
- D функция $f(g(f(g(x))))$ непрерывна в каждой точке
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(-1, 1)$. Тогда

A если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на интервале $(-1,1)$, то и функция $f^2(x)$ достигает наибольшего значения на интервале $(-1,1)$

B если существует конечный предел слева $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает либо наименьшего, либо наибольшего значения на интервале $(-1,1)$

C если функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения на интервале $(-1,1)$, то существует конечный предел слева $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$

D если существуют конечные предел слева $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$ и предел справа $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения на интервале $(-1,1)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Функция $f(x,y) = \sin^4(\pi xy) + \cos^4(\pi xy)$ на множестве $\{(x,y)\colon x^2+y^2=1\}$

A достигает наибольшего значения ровно в двух точках

B достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

C достигает наибольшего значения ровно в шести точках

D достигает наибольшего значения ровно в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

18. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0,1]$, при этом $f(x)$ достигает наибольшего значения ровно в трех точках. Тогда

A множество точек, в которых $f(x)$ достигает наименьшего значения, содержит изолированные точки

B функция $f^3(x) - f^2(x) + 5f(x) - 14$ достигает наибольшего значения ровно в трех точках

C на отрезке $[0,1]$ содержится не менее пяти точек, в которых производная $f'(x)$ существует и равна нулю

D если $f(0) = f(1)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего значения не менее чем в трех точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Числовая функция $f(x)$ определена в окрестности точки 0 на вещественной прямой. Тогда

A если функция $f(x)$ непрерывна в точке 0, то она непрерывна и в некоторой окрестности точки 0

B если функция $f(x)$ дифференцируема в точке 0, то она дифференцируема и в некоторой окрестности точки 0

C если функция $f(x)$ непрерывна в точке 0, то функция $g(x,y) = f(xy)$ непрерывна в точке $(0,0)$

D если функция $f^2(x)$ непрерывна в точке 0, то и функция $f^3(x)$ непрерывна в точке 0

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2e^{1/x} - x^2 - x - \alpha)$ при $\alpha > 0$

A равен 0

B равен $1-\alpha$

C равен $-\alpha$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

21. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{672} - 2\cos(x^{1007}) - \sin(x^{672}) + 2}{x^{2014}}$

A равен 0

B равен 1

C равен 2

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

22. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\ln(x+1)}}{x^4}$

A равен 0

B равен 5

C равен 10

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

23. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{k^2+1}$

A равен 1

B равен 2

C равен $\ln 2$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

24. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

A равен 0

B равен 1

C равен $1/e$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

25. Сумма ряда

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

равна

A $3/2$

B $3\ln(2)$

C $2\ln(3)$

D числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

26. Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 2014}{2^n}$$

равна

A -2012

B -2011

C -2010

D -2009

E -2008

27. Сумма ряда

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 3}$$

равна

A 1/4

B 1/2

C 3/4

D 1

E 3/2

28. Точка A движется по прямой $4x = 3y$ с постоянной скоростью 5 м/сек, точка B движется по прямой $5x = 12y$ с постоянной скоростью 13 м/сек. Обе точки движутся в направлении увеличения координат. В начальный момент точка A имеет координаты $(6\,\text{м}, 8\,\text{м})$, точка B в начальный момент находится в начале координат. Через сколько секунд после начала движения расстояние между точками A и B будет наименьшим?

A через 11/13 секунды

B через 31/41 секунды

C через 23/25 секунды

D через 12/17 секунды

E через число секунд, отличное от указанных в A, B, C, D

29. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два числовых ряда. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если оба ряда сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

II. Если оба ряда абсолютно сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ абсолютно сходится.

III. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ абсолютно сходится.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

30. Числовая функция $f(x)$ задана на всей числовой прямой $\mathbf{R}$. Тогда

A если функция $f(x)$ ограничена на $\mathbf{R}$ и множество $B \subset \mathbf{R}$ ограничено, то полный прообраз $f^{-1}(B)$ является ограниченным множеством

B если функция $f(x)$ не ограничена на $\mathbf{R}$ и множество $B \subset \mathbf{R}$ не ограничено, то полный прообраз $f^{-1}(B)$ является неограниченным множеством

C если функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$ и множество $B \subset \mathbf{R}$ компактно, то полный прообраз $f^{-1}(B)$ является компактным множеством

D если функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$ и множество $B \subset \mathbf{R}$ не является открытым, то полный прообраз $f^{-1}(B)$ не является открытым множеством

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. К графику функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ проведена касательная в точке $\left(a, \dfrac{1}{a^2}\right)$, $a > 0$. Пусть $S(a)$ — площадь треугольника, образованного отрезком касательной между осями координат и отрезками, отсекаемыми касательной на осях координат. Тогда производная $S'(3)$ равна

A $-1/4$

B $3/2$

C $-2/3$

D $1/6$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

32. Пусть

$$f(x) = \int_1^{2x} \sqrt{1+t^2}\,dt, \ x \in \mathbf{R}.$$

Через $f^{-1}(x)$ обозначим функцию, обратную к $f(x)$. Тогда

A $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

B $(f^{-1})'(0) = 2\sqrt{2}$

C $(f^{-1})'(0) = 2$

D $(f^{-1})'(0) = 0$

E производная $(f^{-1})'(0)$ равна числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует.

33. Кривая на плоскости xOy задана уравнением $x^2 + y^3 - 6y^2 + 9y = 8$. Через точку $(2, 1)$ проведена касательная к этой кривой. Тогда

A касательная пересекает ось Oy в точке $(0, 5)$

B касательная пересекает ось Oy в точке $(0, -5)$

C касательная пересекает ось Oy в точке $(0, 3)$

D касательная не пересекает ось Oy

E в точке $(2, 1)$ не существует касательной к этой кривой

34. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и $c \leqslant f(x) \leqslant d$ при любом $x \in [a, b]$, а функция $g(x)$ задана на отрезке $[c, d]$. Найдите *ложное* утверждение

A если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и функция $g(x)$ непрерывна на $[c, d]$, то функция $g(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$

B если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и функция $g(x)$ интегрируема на $[c, d]$, то функция $g(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$

C если функция $f(x)$ возрастает на $[a, b]$ и функция $g(x)$ возрастает на $[c, d]$, то функция $g(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$

D если функция $f(x)$ возрастает на $[a, b]$ и функция $g(x)$ убывает на $[c, d]$, то функция $g(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

35. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ задана рекуррентным соотношением $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 1}$ при $n \geqslant 1$. Тогда

A существует такое число x_1, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ ограничена

B существует такое число x_1, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится

C существует такое число x_1, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ не убывает

D существует такое число x_1, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ не возрастает

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$ равен

A -1

B 0

C 1

D e

E	числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

37. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2(1/x)(1-\cos x)}{x}$ равен

A	0

B	1

C	$1/e$

D	e

E	числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

38. Область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n}{n}(x-4)^n$ равна

A	$(4-1/e, 4+1/e)$

B	$(4-1/e, 4+1/e]$

C	$[4-1/e, 4+1/e)$

D	$[4-1/e, 4+1/e]$

E	множеству, отличному от перечисленных в A, B, C, D

39. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\pi\prod\limits_{k=2}^{n}(1-1/k)\right)^n$ равен

A	0

B	1

C	π^e

D	e^π

E	числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

40. Интеграл $\int_0^{2x} |t-x|dt$ при $x \geqslant 0$ равен

A	0

B	1

C	x

D	x^2

E	выражению, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

15.1.2 Вторая часть теста

1. Матрица P задает оператор проектирования в пространстве $\mathbf{R}^4$, и два вектора

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

являются ее собственными векторами. Известно, что ранг матрицы P равен двум, и матрица $2P - I$, где через I обозначается единичная матрица, ортогональная. Тогда

а) матрица P симметричная;

Да Нет

б) матрица P не симметричная;

Да Нет

в) существует ровно две матрицы P, удовлетворяющие поставленным условиям;

Да Нет

г) существует ровно шесть матриц P, удовлетворяющих поставленным условиям;

Да Нет

д) существует бесконечно много матриц P, удовлетворяющих поставленным условиям;

Да Нет

е) сумма элементов матрицы P равна 2;

Да Нет

ж) матрица P имеет ровно шесть положительных элементов;

Да Нет

з) матрица P имеет ровно шесть отрицательных элементов.

Да Нет

2. Дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|^{\alpha}},$$

где $\alpha \geqslant 0$ — вещественный параметр. Обозначим через $M \subset \mathbf{R}$ множество его сходимости, а через $f(x)$ — сумму этого ряда для всех $x \in M$. Тогда

а) для любого α множество M является замкнутым;

Да Нет

б) существует α, для которого множество M является открытым;

Да Нет

в) существует α, для которого множество M содержит изолированную точку;

Да Нет

г) для любого α ряд на множестве M сходится равномерно;

Да Нет

д) при $\alpha = 2$ множество M является замкнутым;

Да Нет

е) при $\alpha = 3$ ряд на множестве $M \cap [1, +\infty)$ сходится равномерно;

Да Нет

ж) при $\alpha = 2014$ уравнение $f(x) = 2^{2014}$ имеет более 2014 решений на множестве M;

Да Нет

з) при $\alpha = 2014$ уравнение $f(x) = 2^{2014}$ имеет не более одного решения на множестве M.

Да Нет

3. Дано семейство функций $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - a} - 3}{x - b}$, где параметры $a, b \in \mathbf{R}$. Обозначим через $M \subset \mathbf{R}^2$ множество пар чисел (a, b), для которых существует и конечен предел $\lim\limits_{x \to b} f(x)$, а через $K \subset \mathbf{R}$ — область определения функции $f(x)$. Тогда

а) существует бесконечно много пар чисел (a, b), для которых множество K симметрично относительно нуля;

Да Нет

б) существует бесконечно много пар чисел (a, b), для которых множество K не симметрично относительно нуля;

Да Нет

в) существует более одной пары чисел (a, b), для которых множество $\mathbf{R} \setminus K$ не замкнуто и не открыто;

Да Нет

г) существует пара чисел (a, b), для которой функция $f(x)$ ограничена на K;

Да Нет

д) множество $M \cap (-\infty, 0)^2$ не ограничено;

Да Нет

е) множество $M \cap (0,+\infty)^2$ не ограничено;

Да Нет

ж) множество значений предела $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ при $(a,b) \in M \cap (0,+\infty)^2$ ограничено;

Да Нет

з) множество значений предела $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ при $(a,b) \in M \cap \{(a,b)\colon\ a^2+b^2 \leqslant 9\}$ имеет непустое пересечение с множеством $(-e/3, e/3)$.

Да Нет

4. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = x^2e^{-t}, \quad x(0) = x_0,$$

где x_0 — вещественный параметр. Тогда

а) при любом значении x_0 функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) множество значений x_0, при которых $x(t)$ ограничена на своей области определения, открыто;

Да Нет

в) существуют значения x_0, при которых $x(t)$ периодическая;

Да Нет

г) при любом x_0 множество нулей функции $x(t)$ открыто;

Да Нет

д) если в некоторой точке t значение второй производной функции $x(t)$ равно нулю, то и значение самой функции в этой точке равно нулю;

Да Нет

е) если $x_0 = 2/3$, то $\sin x(t)$ возрастает на своей области определения;

Да Нет

ж) если $x_0 = 2$, то $x(1) = \dfrac{2e}{2-e}$;

Да Нет

з) если $x_0 = -1$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = -1/2$.

Да Нет

5. Дана функция $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ и множество $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon xy + yz + xz = 1\}$. Тогда

а) множество M компактное;

Да Нет

б) функция $f(x, y, z)$ достигает на множестве M наибольшего значения;

Да Нет

в) функция $f(x, y, z)$ достигает на множестве M наименьшего значения;

Да Нет

г) число точек локального максимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M не меньше трех;

Да Нет

д) точка $(1, 1, 0)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M;

Да Нет

е) число точек локального минимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M нечетно;

Да Нет

ж) точка $\left(0, 2, \dfrac{1}{2}\right)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M;

Да Нет

з) в точке $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ функция $f(x, y, z)$ достигает наименьшего значения на множестве M.

Да Нет

15.2 Ответы и решения теста

15.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. B. **2.** E. **3.** E. **4.** B. **5.** C. **6.** D. **7.** D. **8.** A. **9.** E. **10.** C. **11.** B. **12.** C. **13.** E. **14.** A. **15.** D. **16.** E. **17.** D. **18.** B. **19.** C. **20.** D. **21.** B. **22.** E. **23.** D. **24.** A. **25.** E. **26.** A. **27.** C. **28.** B. **29.** D. **30.** E. **31.** A. **32.** A. **33.** D. **34.** B. **35.** C. **36.** C. **37.** A. **38.** C. **39.** D. **40.** D.

15.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Возведем в квадрат матрицу $2P - I$ и преобразуем полученное выражение, воспользовавшись соотношением $P^2 = P$, справедливым для проектора P:

$$(2P - I)^2 = 4P^2 - 4P + I = 4P - 4P + I = I.$$

По условию известно, что $(2P - I)(2P - I)^T = I$ (так как матрица $2P - I$ ортогональная), поэтому $(2P - I)^T = 2P - I$, а значит и $P^T = P$ (ответы на вопросы а) — да, б) — нет).

Так как P задает проектор в $\mathbf{R}^4$ и имеет ранг 2, то она имеет два собственных числа — единицу и ноль, оба кратности 2. Так как матрица P симметричная, то она задает ортопроектор, и собственные векторы, соответствующие разным собственным числам, ортогональны друг другу (при стандартном скалярном произведении). И так как собственные векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

не ортогональны, то они соответствуют одному собственному числу, обозначим его через λ. Это может быть как единица, так и ноль. В первом случае P задает ортопроектор на двумерное подпространство — линейную оболочку

$$L = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right),$$

во втором случае P задает ортопроектор на ортогональное дополнение к L. Ответы на вопросы в) — да, г) — нет, д) — нет.

Далее, заметим, что вектор

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ортогонален обоим из заданных векторов. Поэтому это тоже собственный вектор, и он соответствует другому собственному числу $1-\lambda$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p_{ij} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} P \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} P \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \left(\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\1-\lambda\\1-\lambda\end{pmatrix} = 2\lambda + 2(1-\lambda) = 2$$

(ответ на вопрос е) — да).

Чтобы сосчитать число положительных и отрицательных элементов матрицы P, найдем ее. А именно, воспользуемся соотношением

$$P = X\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}X^{-1},$$

где столбцы матрицы X являются соответствующими собственными векторами матрицы P. Можно заметить, что если векторы

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

являются собственными векторами матрицы P и соответствуют собственному числу λ, то векторы

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

ортогональны им, а значит являются собственными векторами матрицы P и соответствуют собственному числу $1-\lambda$. Также ортогонализуем исходную пару векторов (вычтем первый вектор из второго) и получим:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Нормируем эти четыре вектора и получим ортонормированную систему состоящую из собственных векторов матрицы P:

$$\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix},$$

и матрицу

$$X = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2\\ 0 & -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2\end{pmatrix},$$

для которой $X^{-1} = X^{T}$. Теперь легко сосчитать для $\lambda = 1$

$$P = X\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}X^{T} = \begin{pmatrix}3/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4\\ 1/4 & 3/4 & -1/4 & 1/4\\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4\\ -1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4\end{pmatrix},$$

и в ней ровно 6 отрицательных и 10 положительных элементов. Для $\lambda = 0$

$$P = I - \begin{pmatrix}3/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4\\ 1/4 & 3/4 & -1/4 & 1/4\\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4\\ -1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4\\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4\\ -1/4 & 1/4 & 3/4 & 1/4\\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & 3/4\end{pmatrix},$$

и в ней тоже ровно 6 отрицательных и 10 положительных элементов (ответы на вопросы ж) — нет, з) — да).

Задача 2. Данный ряд имеет счётное число особенностей — он не определён в точках $x = -1, -2, -3, \ldots$. Кроме того, ряд не определён в точках, в которых $x(x-1) < 0$, т. е. на интервале $(0, 1)$, — на нём при достаточно большом значении n числитель не определён. Отметим, что для любого α ряд сходится в точках $x = 0$ и $x = 1$, и что все члены ряда неотрицательны.

а) Ответ: нет. При $\alpha = 4$ ряд сходится в точках, сколь угодно близких к -1, поскольку при $n \geqslant 3$

$$\frac{\ln(1+nx(x-1))}{|n+x|^4} \leqslant \frac{nx(x-1)}{|n+x|^4} = \frac{n}{|n+x|}\frac{x(x-1)}{|n+x|^3} \leqslant 3\frac{x(x-1)}{|n-1|^3}.$$

Ряд из последних слагаемых сходится, и следовательно, сходится исходный ряд. В то же время в точке -1 ряд не определён, следовательно, множество сходимости не является замкнутым.

б) Ответ: нет. Поскольку точки 0 и 1 всегда являются точками сходимости ряда, а точки внутри интервала $(0,1)$ таковыми не являются, то множество сходимости не является открытым.

в) Ответ: да. Например, для $\alpha = 1$ ряд сходится в точке $x = 0$, не определён при $x \in (0,1)$ и не сходится в левой окрестности точки $x = 0$: при $x < 0$

$$\frac{\ln(1+nx(x-1))}{|n+x|} \geqslant \frac{\ln(1+x(x-1))}{|n+x|} \geqslant \frac{\ln(1+x(x-1))}{n}.$$

Поскольку ряд из последних слагаемых не сходится, то и исходный ряд не сходится.

г) Ответ: нет. При $\alpha = 4$ ряд сходится на множестве $M = [0,+\infty) \cup (-1,0] \cup (-2,-1) \cup$ $\cup\, (-3,-2) \cup \ldots$ (рассуждения такие же, как и в пункте а). В то же время для любого n

$$\lim_{x\to-n} \frac{\ln(1+nx(x-1))}{|n+x|} = +\infty,$$

откуда следует, что общий член ряда не стремится к нулю равномерно на M, а значит ряд не сходится равномерно на M.

д) Ответ: нет. Мы можем оценить при $x \in (-1,0)$ и достаточно больших n

$$\ln(1+nx(x-1)) \leqslant \ln(1+2n) \leqslant Cn^{1/2},$$

где $C > 0$ — некоторая константа. Тогда

$$\frac{\ln(1+nx(x-1))}{|n+x|^2} \leqslant \frac{Cn^{1/2}}{|n+x|^2} = \frac{n^{1/2}}{|n+x|^{1/2}}\frac{C}{|n+x|^{3/2}} \leqslant \frac{2C}{|n-1|^{3/2}}.$$

Ряд из последних слагаемых сходится, значит, сходится и исходный ряд. В то же время, в точке -1 ряд не определен, и значит, множество M не замкнутое.

е) Ответ: да. При $\alpha = 3$ и $x \geqslant 1$ общий член ряда можно оценить следующим образом:

$$\frac{\ln(1+nx(x-1))}{|n+x|^3} \leqslant \frac{nx(x-1)}{|n+x|^3} \leqslant \frac{nx^2}{(n+x)^3} \leqslant \frac{n}{(n+1)^3}$$

(последнее неравенство верно, так как функция $\dfrac{nx^2}{(n+x)^3}$ убывает при $x \geqslant 1$). Следовательно, по признаку Вейерштрасса, исходный ряд сходится равномерно.

ж–з). Отметим, что по соображениям, аналогичным пункту а), данный ряд сходится на множестве $M = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-n,-n+1)\right) \cup [1,+\infty)$.

Отметим также, что числитель дроби убывает по x при $x < 0$.

Рассмотрим поведение ряда в полуинтервале $x \in (-n, -n+1/2]$, $n = 2, 3, \ldots$. На нём член ряда с номером n можно оценить как

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+nx(x-1))}{|n+x|^{2014}} &\geqslant \frac{\ln(1+n(-n+1/2)(-n-1/2))}{|1/2|^{2014}} = \\ &= 2^{2014}\ln(1+n(n^2-1/4)) \geqslant 2^{2014}.\end{aligned}$$

В то же время на полуинтервале $x \in [-n+1/2, -n+1)$ член ряда с номером $n+1$ можно оценить как

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+(n+1)x(x-1))}{|n+x|^{2014}} &\geqslant \frac{\ln(1+(n+1)(-n+1)(-n))}{|1/2|^{2014}} = \\ &= 2^{2014}\ln(1+(n+1)(n^2-n)) \geqslant 2^{2014}.\end{aligned}$$

Поскольку все члены ряда неотрицательные и по крайней мере один из них превосходит 2014, то решений на интервалах $(-n, -n+1)$, $n = 2, 3, \ldots$нет.

На множестве $x \in [1, \infty)$ решений нет, поскольку ряд можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx(x-1))}{|n+x|^{2014}} &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx(x-1)}{|n+x|^{2014}} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{|n+x|}\frac{x^2}{|n+x|^2}\frac{1}{|n+x|^{2011}} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|n+x|^{2011}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1.\end{aligned}$$

Остаётся исследовать полуинтервал $(-1, 0]$. При приближении к левой его точке сумма ряда растёт неограниченно. В правой точке значение ряда равно 0. При этом каждый член ряда убывает по x в этом полуинтервале. Следовательно, у уравнения есть единственное решение именно в полуинтервале $(-1, 0]$.

Ответ на вопрос ж) — нет, на вопрос з) — да.

Задача 3. Для последовательности пар чисел $(a, b) = (n^2, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$, множество $K = \{x\colon x^2 \geqslant n^2\}$ симметрично относительно нуля, поэтому а) — да.

Для последовательности пар чисел $(a, b) = (0, n)$, $n = 1, 2, \ldots$, множество $K = \{x\colon x \neq n\}$ не симметрично относительно нуля, поэтому б) — да.

Для последовательности пар чисел $(a, b) = (n^2, n)$, $n = 1, 2, \ldots$, множество $R \setminus K = (-n, n]$ не замкнуто и не открыто, поэтому в) — да.

Для пары чисел $(a, b) = (1, 0)$, множество $K = \{x\colon x^2 \geqslant 1\}$, и $|f(x)| \leqslant |\sqrt{1-x^{-2}}| + |3/x| < 4$ на K, поэтому г) — да.

Если предел $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ конечен, то необходимо, чтобы $\lim\limits_{x\to b}\sqrt{x^2-a} - 3 = 0$, т. е. $a = b^2 - 9$. Поэтому $M \cap (-\infty, 0)^2 \subset [-9, 0]^2$, д) — нет.

Если $a = b^2 - 9$, то предел $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ существует и равен $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a}} = b/3$, а $M = \{(a, b) \in R^2\colon a = b^2 - 9\}$, поэтому е) — да, ж) — нет.

Парабола $a = b^2 - 9$ пересекает окружность $a^2 + b^2 = 9$ в четырех точках: $(0, 3)$, $(0, -3)$, $(-1, 2\sqrt{2})$ и $(-1, -2\sqrt{2})$. На множестве $M \cap \{a^2 + b^2 \leqslant 9\}$ параметр b принимает значения $[-3, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, 3]$. Так как $e < 2.8 < 2\sqrt{2}$, то множество значений предела $\lim\limits_{x \to b} f(x) = b/3$, имеет пустое пересечение с множеством $(-e/3, e/3)$, поэтому з) – нет (см. рис. 16).

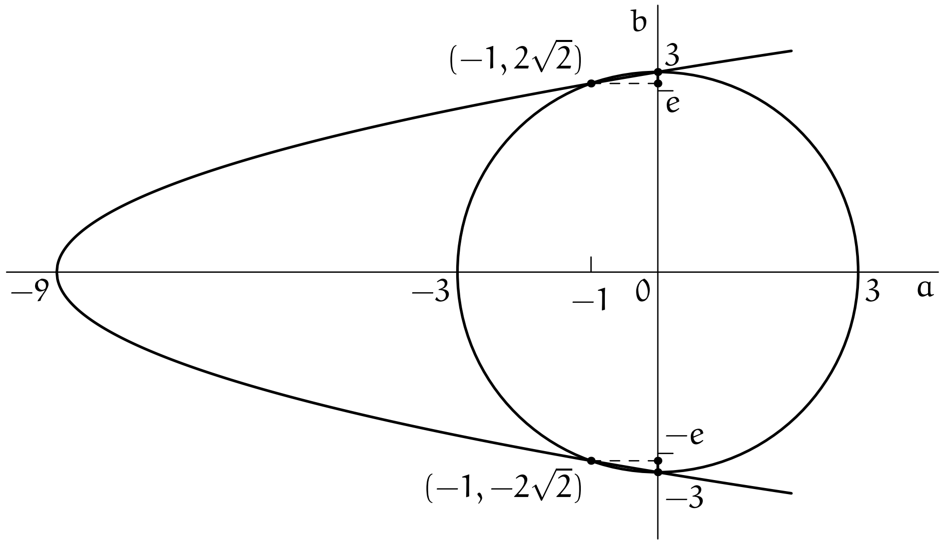


Рис. 16. Множество $M \cap \{a^2 + b^2 \leqslant 9\}$

Задача 4. Найдем решение данной задачи Коши. Поскольку переменные разделяются, имеем

$$\frac{dx}{x^2} = e^{-t} dt,$$

откуда

$$-\frac{1}{x} + C = -e^{-t},$$

так что при $x_0 \neq 0$

$$x(t) = \frac{1}{e^{-t} + 1/x_0 - 1}.$$

Видно, что при $x_0 > 1$ знаменатель обращается в ноль при некотором t (ответ на вопрос а) — нет). Далее, при $x_0 = 0$ решение тождественно равно нулю (ответ на вопрос в) — да), а при любом отрицательном x_0 знаменатель обращается в 0 при некотором t_0 и при приближении к t_0 решение неограниченно растет по абсолютной величине (ответ на вопрос б) — нет). Функция $x(t)$ не обращается в ноль ни при каких t при $x_0 \neq 0$ (ответ на вопрос г) — да). Для ответа на вопрос д) заметим, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} x^2 e^{-t} = -x^2 e^{-t} + 2x e^{-t} \frac{dx}{dt} = x^2 e^{-t} \left(2x e^{-t} - 1 \right),$$

что, например, при $x_0 = e/(e+1)$ обращается в ноль при $t = 1$, так что ответ — нет.

При $x_0 = 2/3$ решение $x(t) = 1/(e^{-t} + 1/2)$ возрастает на всей прямой, принимая значения в интервале $(0, 2)$, однако функция $\sin x$ на этом интервале не возрастает монотонно (ответ на вопрос е) — нет). При $x_0 = 2$ решение $x(t) = 1/(e^{-t} - 1/2)$ определено только при $t < \ln 2$ (ответ на вопрос ж) — нет). Наконец, при $x_0 = -1$ решение $x(t) = 1/(e^{-t} - 2)$ определено при всех $t > 0$ и стремится к $-1/2$ при $t \to +\infty$ (ответ на вопрос з) — да).

Задача 5. Заметим, что точка $(n, 1/n, 0)$ принадлежит множеству M при любом натуральном n. Значит, множество M не ограничено, а значит и не является компактным. Ответ на вопрос а) — нет. Имеем $f(n, 1/n, 0) = n^2 + 1/n^2$, т. е. значения функции $f(x, y, x)$ на M не ограничены сверху. Поэтому ответ на вопрос б) — нет.

Так как $f(x, y, z) \geqslant 0$ при всех x, y, z, то существует точная нижняя грань $\inf\{f(x, y, z), (x, y, z) \in M\}$. Обозначим ее через a. Точка $(1, 1, 0)$ принадлежит M, и $f(1, 1, 0) = 2$, значит $a \leqslant 2$. Рассмотрим куб $K = \{(x, y, z) \colon |x| \leqslant 2, |y| \leqslant 2, |z| \leqslant 2\}$. Ясно, что если $(x, y, z) \notin K$, то $f(x, y, z) > 2$. Значит,

$$a = \inf\{f(x, y, z), (x, y, z) \in M\} = \inf\{f(x, y, z), (x, y, z) \in M \cap K\}.$$

Множество M замкнуто как поверхность уровня непрерывной функции, а куб K компактен. Значит, множество $M \cap K$ компактно, и по теореме Вейерштрасса точная нижняя грань достигается, поскольку функция $f(x, y, z)$ непрерывна. Ответ на вопрос в) — да.

Обозначим $g(x, y, z) = xy + xz + yz - 1$. Нетрудно проверить, что градиент функции $g(x, y, z)$ равен нулю только в точке $(0, 0, 0)$, а она не принадлежит M. Поэтому функцию Лагранжа для этой задачи можно взять сразу в виде $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda(y + z) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda(x + z) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda(x + y) = 0. \end{cases}$$

Складывая почленно все уравнения, получаем $(x + y + z)(\lambda + 1) = 0$.

1-й случай: $x + y + z = 0$. Возводя в квадрат обе части равенства и проводя элементарные преобразования, получаем $xy + xz + yz = -\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \leqslant 0$, что несовместимо с ограничением $g(x, y, z) = 0$.

2-й случай: $\lambda = -1$. Вычитая из первого уравнения второе получаем $x = y$, и аналогично $y = z$. Следовательно, имеем две стационарные точки $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, в которых значения функции $f(x, y, z)$ одинаковые и равны 1. Поскольку существование наименьшего значения функции $f(x, y, z)$ на множестве M доказано, то эти две точки и являются точками, в которых это наименьшее значение достигается.

Ответы на вопросы г), д), ж) — нет, на вопросы е), з) — да.

16 Вступительный экзамен 2015 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена для программы МЭРЭ 2.5 часа, для программы МАЭ 4 часа, максимальная оценка — «12».

Каждый тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом из которых надо выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, для абитуриентов программы МАЭ одинаково. Для абитуриентов программы МЭРЭ первая часть теста имела больший вес. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

16.1 Тест 1 (общий для программ МАЭ и МЭРЭ)

16.1.1 Первая часть теста

1. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = (y+1)\cos 8x$, $y(0) = 0$. Тогда $y(x)$

A определена при $x = 1/4$, но не определена при $x = 1/2$

B определена при $x = 1/2$, но не определена при $x = 1$

C определена при $x = 1$, но не определена при $x = 2$

D определена при $x = 2$, но не определена при $x = 4$

E определена при $x = 4$

2. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = y^2 \sin x$, $y(0) = 1$ на своей области определения

A не имеет нулей

B имеет ровно один ноль

C имеет ровно два нуля

D имеет ровно четыре нуля

E имеет более четырех нулей

3. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки 0, причем $f(0) = g(0) = 0$. Тогда

A функция $f(g(x))$ определена в некоторой окрестности точки 0, причем $f(g(0)) = 0$

B если функция $f(x)$ непрерывна в точке 0, то и функция $g(f(x))$ непрерывна в точке 0

C если функция $f(x)$ разрывна в точке 0, то и функция $g(f(x))$ разрывна в точке 0

D если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке 0, то и функция $\operatorname{arctg}(f^2(x) + g^2(x))$ непрерывна в точке 0.

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей вещественной прямой. Тогда

A если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, то и функция $\operatorname{tg} f(x)$ достигает наибольшего значения

B если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, то и функция $\operatorname{arctg} f(x)$ достигает наибольшего значения

C если функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

D если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения.

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Функция $f(x, y) = \operatorname{tg}(\pi x y/2)$ на множестве $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$

A достигает наибольшего значения ровно в двух точках

B достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

C достигает наибольшего значения ровно в шести точках

D достигает наибольшего значения ровно в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

6. Функция $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ на множестве $\{(x, y) \colon x^2 + 4xy + 4y^2 = 2\}$

A достигает наибольшего значения в единственной точке

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

D достигает наибольшего значения в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

7. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0, 1]$, при этом $f(x)$ достигает наибольшего значения ровно в двух точках, не совпадающих ни с 0, ни с 1. Тогда

A функция $f(x)$ достигает наименьшего значения не менее, чем в трех точках

B функция $f^2(x)$ достигает наибольшего значения не менее, чем в двух точках

C если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(0, 1)$, то производная $f'(x)$ равна нулю не менее, чем в трех точках

D если $f(0) = f(1)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего значения не менее чем в трех точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Функция $f(x)$ отображает отрезок $[0, 1]$ в отрезок $[0, 1]$. Тогда

A если функция $f(x)$ непрерывна, то существует точка x такая, что $f(x) = x$

B если функция $f(x)$ монотонно убывает, то существует точка x такая, что $f(x) = x$

C если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(0, 1)$ то существует точка x такая, что $f'(x) = 0$

D если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(0, 1)$ то существует точка x такая, что $f'(x) = 1$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Интеграл $\int_{-1}^{0} \frac{9}{x^2+x-2}\,dx$ равен

A $-6\ln 2$

B $-18\ln 2$

C $-2\ln 2$

D $6\ln 2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

10. Интеграл $\int_{0}^{\pi/2} (\cos^2 x + \sin x - 1)dx$ равен

A 0

B $1 - 3\pi/4$

C $1 - \pi/4$

D $1 - \pi/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

11. Интеграл $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ равен

A 0

B $\ln 2$

C $-\ln 2$

D 2

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

12. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{0}^{n} \frac{(2+n)^n}{(1+x^2)n^n}\,dx$ равен

A $e^2\pi$

B $e^2\pi/6$

C $e^2\pi/4$

D $e^2\pi/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

13. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 e^{-x}}{1-\cos x}$ равен

A 2

B $2e$

C 4

D $4e$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

14. Предел $\lim\limits_{x\to 1+0} x^{2/(x^2-1)}$ равен

A 2

B e

C 1

D $\sqrt{e}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

15. Интеграл $\displaystyle\int_0^1 \left(\sin^2 x + \operatorname{tg} x\right) dx$ равен

A $1/2 - 1/4 \sin 1 - \ln(\cos 1)$

B $1/2 - 1/4 \sin 1 + \ln(\cos 1)$

C $1/2 - 1/4 \sin 2 - \ln(\cos 1)$

D $-1/2 + 1/4 \sin 2 - \ln(\cos 1)$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

16. Предел $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1 - x - x^2}{x^2}$

A равен 0

B равен $1/2$

C равен $-1/2$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

17. Предел $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2-x) - x + x^2}{\ln x + x - x^2}$

A равен -3

B равен -1

C равен 3

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

18. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^4}$

A равен 0

B равен 1

C равен 2

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

19. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=3}^{n}\dfrac{3}{k^2-k-2}$

A равен 0

B равен $1/3$

C равен $\dfrac{\ln 2}{2}$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

20. Для натуральных чисел m, n предел $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(mx)}{\sin(nx)}$

A равен $(-1)^{m-n}\dfrac{m}{n}$

B равен $(-1)^{m-n}\dfrac{n}{m}$

C равен $\dfrac{m}{n}$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

21. Сумма ряда

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\frac{1}{\sqrt{5\cdot 7}}+\dots$$

равна

A $\sqrt{2}$

B $2\sqrt{3}$

C $3\sqrt{3}$

D числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

22. Сумма ряда
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}$$
равна

A $\quad \dfrac{1}{\ln 2}$

B $\quad \dfrac{1}{\ln 3}$

C $\quad \dfrac{1}{\ln 4}$

D числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

23. Предел $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x)\operatorname{ctg} x$

A равен 0

B равен 1

C равен -1

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

24. Пусть $f(x, y) = x^2 + y^2$ и $M = \{(x, y)\colon x^2y = 1\}$. Тогда

A функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наибольшего значения ровно в одной точке

B функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наименьшего значения ровно в одной точке

D функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наименьшего значения ровно в двух точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся, последовательность $\{y_n\}$ — расходящейся. Тогда

A последовательность $\{x_n y_n\}$ является расходящейся

B если $y_n \neq 0$ при всех n, то последовательность $\{x_n/y_n\}$ является расходящейся

C если $x_n > 0$ при всех n, то последовательность $\{x_n^{y_n}\}$ является расходящейся

D если $y_n > 0$ при всех n, то последовательность $\{y_n^{x_n}\}$ является расходящейся

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

26. Кривая на плоскости xOy задана уравнением $x^3 + y^3 + 2x^2y^2 = 17$. Через точку $(1, 2)$ проведена касательная $y = kx + b$ к этой кривой. Тогда угловой коэффициент k этой касательной равен

A $19/20$

B $-19/20$

C $20/19$

D $-20/19$

E числу, отличному от перечисленных в A–D

27. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$, непрерывна и положительна. Тогда предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{n}{n}\right)}$$

равен

A $\exp\left(\int_0^1 \ln f(x)dx\right)$

B $\ln\left(\int_0^1 \exp f(x)dx\right)$

C $\exp\left(\int_0^1 f(x)dx\right)$

D $\ln\left(\int_0^1 f(x)dx\right)$

E числу, отличному от указанных в A–D, или не существует

28. Пусть $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} y\sqrt{1+y}\,dy$. Тогда производная $f'(2)$

A равна $16\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$

B равна $8\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$

C равна $4\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$

D равна числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

29. Даны матрицы A и B размера $m \times n$, где $m, n \geqslant 2$, у которых строки линейно независимые. Через X^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице X. Тогда

A матрица AA^T невырожденная

B матрица B^TB невырожденная

C матрица AB^T невырожденная

D матрица A^TB невырожденная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. В линейном пространстве даны две системы векторов $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Через L_X и L_Y обозначим линейные оболочки систем X и Y соответственно, а через $\dim L_X$ и $\dim L_Y$ — их размерности. Тогда

A если $n > m$, то $\dim L_X > \dim L_Y$

B если $\dim L_X > \dim L_Y$ и система Y линейно независимая, то $n > m$

C если $\dim L_X > \dim L_Y$ и система X линейно зависимая, то $n > m$

D если $\dim L_X = \dim L_Y$, то $n = m$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ равен

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

32. Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ равен

A -1

B 0

C 1

D 2

E не существует

16.1.2 Вторая часть теста

1. Функция одной вещественной переменной задана формулой $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} |x^2 - 1|^{1/n} \operatorname{arctg}(x^n)$. Тогда

а) областью определения функции $f(x)$ является интервал $(-\infty, +\infty)$;

Да Нет

б) областью определения функции $f(x)$ является полуинтервал $(-1, +\infty)$;

Да Нет

в) область определения функции $f(x)$ является замкнутым множеством;

Да Нет

г) на промежутке $(-1, 1)$ функция $f(x)$ четная;

Да Нет

д) в области определения функция $f(x)$ имеется один устранимый разрыв;

Да Нет

е) в области определения функция $f(x)$ имеется один неустранимый разрыв первого рода;

Да Нет

ж) множество значений функции $f(x)$ состоит из трех точек 0, $\pi/4$, $\pi/2$;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

2. Дана функция $f(x, y) = 2x - y$ и множество $M = \{(x, y)\colon x^2 + xy = -3\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наибольшего значения;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наименьшего значения;

Да Нет

в) число локальных минимумов функции $f(x, y)$ на множестве M нечетно;

Да Нет

г) число локальных максимумов функции $f(x, y)$ на множестве M четно;

Да Нет

д) точка $(1,-4)$ является точкой локального минимума функции $f(x,y)$ на множестве M;

Да Нет

е) точка $\left(2,-\frac{7}{2}\right)$ является точкой локального максимума функции $f(x,y)$ на множестве M;

Да Нет

ж) точка $(-1,4)$ является точкой локального максимума функции $f(x,y)$ на множестве M;

Да Нет

з) существует точка A локального минимума и точка B локального максимума функции $f(x,y)$ на множестве M, такие что $f(A) > f(B)$.

Да Нет

16.2 Тест 2 (программа МАЭ)

16.2.1 Первая часть теста

33. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\sin x)^{\ln(x^2+1)}-1}{x^3}$

A равен -1

B равен 0

C равен 1

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

34. Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2015+n}{3^n}$$

равна

A $\dfrac{3\cdot 4033}{4}$

B $\dfrac{4033}{2}$

C $\dfrac{4033}{4}$

D $\dfrac{4033}{8}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

35. Пусть M — множество тех вещественных чисел x, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x^2+2}-1)$. Для $x \in M$ обозначим через $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x^2+2}-1)$. Найдите *ложное* утверждение.

A $\quad$ M — открытое множество

B $\quad$ M — замкнутое множество

C $\quad$ уравнение $f(x) = \ln 2$ имеет единственное решение

D $\quad$ $f'(1) = 1$

E $\quad$ среди утверждений A, B, C, D есть ложное

36. Функция $f(x)$ непрерывна на множестве $[0, +\infty)$. Найдите *ложное* утверждение.

A $\quad$ если $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx > 0$, то существует такой отрезок $[a, b] \subset [0, 1]$, что $f(x) > 0$ для любого $x \in [a, b]$

B $\quad$ если существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, то существует предел $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$ и этот предел равен a

C $\quad$ если не существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то не существует предел $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$

D $\quad$ если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[0, 1]$, то для любого числа $a \in (0, 1)$ выполнено неравенство $a\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \leqslant \int_0^a f(x)dx$

E $\quad$ среди утверждений A, B, C, D есть ложное

37. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда

A $\quad$ матрица A имеет три разных вещественных собственных числа

B $\quad$ у матрицы A для всех вещественных собственных чисел их геометрическая кратность совпадает с алгебраической

C $\quad$ ноль является собственным числом матрицы A, и размерность соответствующего собственного подпространства равна 2

D $\quad$ наибольшее вещественное собственное число матрицы A равно 2

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

38. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, где α — вещественный параметр. Тогда

A при всех α система $Ax = 0$ имеет единственное решение

B найдется α, такое что множество решений системы $Ax = 0$ двумерное

C найдется единственное α, такое что множество решений системы $Ax = 0$ одномерное

D найдется ровно два значения α, таких что множество решений системы $Ax = 0$ одномерное

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

39. Квадратная матрица A трактуется как линейный оператор в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 4$, в котором задано стандартное скалярное произведение. Через X^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице X, и через $L^\perp$ обозначим ортогональное дополнение к подпространству L. Тогда

A если $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A)^\perp$, то $A = A^T$

B если $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^T$, то $A = A^T$

C если $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^T$, то $A = A^T$

D если $\operatorname{Im} A = \operatorname{Ker} A$, то $A \neq A^T$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

40. Симметричная матрица A задает оператор проектирования в пространстве $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 3$, причем известно, что матрица A не является ни нулевой, ни единичной. Через x^T обозначим строку, транспонированную к столбцу x. Тогда

A множество $\{x \in \mathbf{R}^n : x^T A x = 1\}$ ограниченное

B множество $\{x \in \mathbf{R}^n : x^T A x = -1\}$ неограниченное

C множество $\{x \in \mathbf{R}^n : x^T A x = 0\}$ ограниченное

D множество $\{x \in \mathbf{R}^n : x^T A x = 0\}$ является подпространством

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16.2.2 Вторая часть теста

3. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{t^2+1}, \ x(0) = x_0,$$

где x_0 — вещественный параметр. Тогда

а) при любом значении x_0 функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) при любом значении x_0 функция $x(t)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

в) существуют значения x_0, при которых $x(t)$ периодическая;

Да Нет

г) множество значений x_0, при которых область определения функции $x(t)$ открыта, открыто;

Да Нет

д) существует значение $x_0 \neq 0$, при котором $x(t)$ нечетна на своей области определения;

Да Нет

е) при $x_0 \neq 0$ функция $x(t)$ не обращается в ноль на своей области определения;

Да Нет

ж) если $x_0 = \pi/2$, то $x(1) = 4/\pi$;

Да Нет

з) если $x_0 = 4/\pi$, то $x(\sqrt{3}) = \pi/12$.

Да Нет

4. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^x}{|x|^n}$. Обозначим через $M \subset \mathbf{R}$ множество его сходимости и через $f(x)$ — сумму этого ряда для $x \in M$. Тогда

а) множество M является симметричным относительно нуля;

Да Нет

б) множество M является замкнутым;

Да Нет

в) множество M не является открытым;

Да Нет

г) функция $f(x)$ ограничена на множестве $(-\infty, -1)$;

Да Нет

д) на множестве M ряд сходится равномерно;

Да Нет

е) на множестве $[100, +\infty)$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

ж) уравнение $f(x) = 0$ имеет более одного решения на множестве $(-\infty, -1)$;

Да Нет

з) множество отрицательных решений уравнения $f(x) = 1/x$ ограничено.

Да Нет

5. Матрица A размера $m \times n$ и матрица B размера $n \times m$, где $m \geqslant 2$ и $n \geqslant 2m$, трактуются как линейные операторы из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$ соответственно. Известно, что существует матрица $P = B(AB)^{-1}A$. Также в R^n задано стандартное скалярное произведение. Тогда

а) ранг матрицы P равен n;

Да Нет

б) ранг матрицы P равен m;

Да Нет

в) ядро матрицы A совпадает с образом матрицы B;

Да Нет

г) пересечение ядра матрицы A и образа матрицы B есть нулевое подпространство;

Да Нет

д) матрица P симметричная;

Да Нет

е) матрица P задает оператор проектирования в $\mathbf{R}^n$;

Да Нет

ж) если $AB = I$, где через I обозначается единичная матрица, то матрица P задает ортогональный проектор в $\mathbf{R}^n$;

Да Нет

з) если ядро матрицы A ортогонально образу матрицы B, то матрица P задает ортогональный проектор в $\mathbf{R}^n$.

Да Нет

16.3 Ответы и решения теста

16.3.1 Ответы на вопросы первой группы

1. E. **2.** A. **3.** D. **4.** B. **5.** A. **6.** E. **7.** C. **8.** A. **9.** A. **10.** C. **11.** B. **12.** D. **13.** A. **14.** B. **15.** C. **16.** E. **17.** D. **18.** E. **19.** A. **20.** A. **21.** E. **22.** E. **23.** C. **24.** D. **25.** E. **26.** B. **27.** A. **28.** A. **29.** A. **30.** B. **31.** C. **32.** A. **33.** A. **34.** C. **35.** D. **36.** C. **37.** D. **38.** D. **39.** D. **40.** D.

16.3.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Обозначим через M область определения функции $f(x)$, то есть множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} |x^2-1|^{1/n} \operatorname{arctg}(x^n)$.

Очевидно, что $1 \in M$, $-1 \in M$ и $f(-1) = f(1) = 0$. Заметим, что если $x \neq -1$ и $x \neq 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |x^2-1|^{1/n}$. Если $x < -1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(x^n)$ не существует, поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{arctg}(x^{2k}) = \pi/2$, $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{arctg}(x^{2k+1}) = -\pi/2$. Значит $(-\infty,-1) \cap M = \varnothing$. Если $-1 < x < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(x^n) = 0$. Если $x > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(x^n) = \pi/2$. Окончательно получаем: $M = [-1,+\infty)$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \pi/2, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Получаем ответы: а) — нет, б) — нет, в) — да, г) — да, д) — нет, е) — да, ж) — нет, з) — да.

Задача 2. Множество M можно представить в виде $M = \{(x,y)\colon y = -3/x - x\}$. Ясно, что если $(x,y) \in M$ и $x \to 0+$, то $y \to -\infty$ и $f(x,y) \to +\infty$; если $(x,y) \in M$ и $x \to 0-$, то $y \to +\infty$ и $f(x,y) \to -\infty$. Следовательно, функция $f(x,y)$ на множестве M не ограничена ни сверху, ни снизу. Ответы на вопросы а) и б) — нет.

Обозначим для краткости $g(x,y) = x^2 + xy + 3$. Имеем: $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x + y$, $\dfrac{\partial g}{\partial y} = x$. Система $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ имеет единственное решение $x = 0$, $y = 0$, которое не удовлетворяет ограничению $g(x,y) = 0$. Иными словами, все точки множества M регулярны. Поэтому функция Лагранжа в данном случае имеет вид $L(x,y,\lambda) = 2x - y + \lambda(x^2 + xy + 3)$. Условия первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 + 2\lambda x + \lambda y = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -1 + \lambda x = 0,$$

откуда следует, что $\lambda x = 1$, $\lambda y = -4$ и $y = -4x$. Учитывая ограничение $g(x,y) = 0$, получаем две точки, подозрительные на экстремум:

$$A_1 = (1,-4), \quad \lambda = 1, f(1,-4) = 6,$$

и

$$A_2 = (-1,4), \quad \lambda = -1, f(-1,4) = -6,$$

Матрица вторых производных функции Лагранжа есть $D^2L = \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$. Направления допустимых вариаций $dg(x,y) = 0$ имеют вид $(2x+y)dx + xdy = 0$.

Для точки A_1 получаем следующую квадратичную форму:

$$\begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} D^2L \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx & 2dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx & 2dx \end{pmatrix} = 6dx^2.$$

Значит, точка A_1 — это точка локального минимума. Аналогично получаем, что точка A_2 — это точка локального максимума.

Получаем ответы: в) — да, г) — нет, д) — да, е) — нет, ж) — да, з) — да.

Задача 3. Решим данное дифференциальное уравнение. Это уравнение с разделяющимися переменными, поэтому

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dt}{t^2+1}, \quad \text{откуда} \quad -\frac{1}{x} = \operatorname{arctg} t + C.$$

Таким образом, общее решение равно $x(t) = \dfrac{1}{-C - \operatorname{arctg} t}$, и если подставить начальное условие $x(0) = x_0$, то получим $x(t) = \dfrac{1}{1/x_0 - \operatorname{arctg} t}$. Кроме того, при разделении переменных мы потеряли нулевое решение $x(t) \equiv 0$, добавим его. Можно перенести x_0 в числитель дроби, тогда общее решение уравнения примет вид

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 \operatorname{arctg} t}.$$

На каком интервале определено *максимальное решение* при разных x_0? Оно продолжается до тех пор, пока $1 - x_0 \operatorname{arctg} t \neq 0$. Следовательно, для $x_0 \in [-2/\pi, 2/\pi]$ решение $x(t)$ определено при всех $t \in \mathbf{R}$, для $x_0 > 2/\pi$ решение $x(t)$ определено при $t \in (-\infty, \operatorname{tg}(1/x_0))$, и для $x_0 < -2/\pi$ решение $x(t)$ определено при $t \in (\operatorname{tg}(1/x_0), +\infty)$. Таким образом, ответ на вопрос (а) — нет.

При $x_0 > 2/\pi$, если $t \to \operatorname{tg}(1/x_0)-$, то $x(t) \to +\infty$, поэтому ответ на вопрос (б) — нет.

При $x_0 = 0$ функция $x(t) \equiv 0$, это тривиальная периодическая функция, так что ответ на вопрос (в) — да.

Так как максимальное решение задачи Коши всегда определено на интервале, и решение существует при любом начальном условии x_0, то ответ на вопрос (г) — да, множество таких x_0 совпадает с $\mathbf{R}$.

Если функция $x(t)$ нечетная, то $x(0) = 0$, а это и есть x_0. Ответ на вопрос (д) — нет.

Так как правая часть уравнения непрерывна при всех значениях $x \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}$, то уравнение удовлетворяет теореме единственности, поэтому графики никаких двух решений не пересекаются. Так как функция $x(t) \equiv 0$ при $t \in \mathbf{R}$ является решением уравнения, то никакое другое решение не равно нулю ни в одной точке. Ответ на вопрос (е) — да.

При $x_0 = \pi/2 > 2/\pi$ решение $x(t)$ определено при $t < \operatorname{tg}(2/\pi) < \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$, поэтому $x(1)$ не определено, и ответ на вопрос (ж) — нет.

При $x_0 = 4/\pi$ решение $x(t)$ определено при $t < \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$, поэтому $x(\sqrt{3})$ не определено, и ответ на вопрос (з) — нет.

Задача 4. Рассмотрим данный ряд при $x = 1$ и $x = -1$. При $x = 1$ это $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$, он расходится, так как его общий член не стремится к нулю при $n \to \infty$. При $x = -1$ это $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, то есть ряд сходится как ряд Лейбница. Значит ответ на вопрос (а) — нет.

Заметим, что при $|x| > 1$ ряд сходится абсолютно. Действительно,

$$\frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \frac{(n+1)^x|x|^n}{n^x|x|^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \frac{1}{|x|} \to \frac{1}{|x|}$$

при $n \to \infty$. Поэтому по признаку Даламбера ряд из абсолютных величин сходится. Отсюда следует, что множество M не замкнутое, так как его предельная точка 1 ему не принадлежит (ответ на вопрос (б) — нет).

Если теперь рассмотреть любое $x \in (-1, 1)$, то легко видеть, что $\dfrac{n^x}{|x|^n} \to +\infty$ при $n \to \infty$, и ряд расходится. Так как он сходится в точке $x = -1$, то множество M не является открытым (ответ на вопрос (в) — да). Мы получили, что множество $M = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$.

Для ответа на вопросы (д) и (е) рассмотрим общий член ряда $a_n(x)$ в точке $x = n$. Он равен

$$a_n(x) = \frac{(-1)^n n^n}{|n|^n} = (-1)^n.$$

Отсюда следует, что при $n \geqslant 100$ верхняя грань $\sup\limits_{x\in M}|a_n(x)| \geqslant \sup\limits_{x\in[100,+\infty)}|a_n(x)| \geqslant 1$, то есть общий член ряда не сходится к нулю равномерно ни на $[100, +\infty)$, ни тем более на всем M. Поэтому ряд равномерно не сходится. Ответ на вопрос (д) — нет, на вопрос (е) — нет.

При отрицательных $x \in M$ данный ряд является рядом Лейбница общим членом. Так как его первый член отрицательный, то для его суммы $f(x)$ выполняются неравенства

$$f(x) \geqslant a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) = -\frac{1}{|x|} + \frac{2^x}{|x|^2} - \frac{3^x}{|x|^3} > \frac{1}{x}$$

и

$$f(x) \leqslant a_1(x) + a_2(x) = -\frac{1}{|x|} + \frac{2^x}{|x|^2} < 0.$$

Поэтому ни у уравнения $f(x) = 0$, ни у уравнения $f(x) = 1/x$ отрицательных решений не существует. Поэтому ответ на вопрос (ж) — нет, на вопрос (з) — да.

Задача 5. Так как существует матрица $P = B(AB)^{-1}A$, то матрица AB невырожденная и, следовательно, имеет ранг m. Так как $\operatorname{rank} AB \leqslant \operatorname{rank} A$ и $\operatorname{rank} AB \leqslant \operatorname{rank} B$, то $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = m$ (больше, чем m он быть не может, поскольку матрица A имеет m строк, а матрица B имеет m столбцов).

Рассмотрим матрицу $APB = AB(AB)^{-1}AB = AB$. Ее ранг равен m. Но так как $\operatorname{rank} APB \leqslant \operatorname{rank} P$, то $\operatorname{rank} P \geqslant m$. А так как $P = B(AB)^{-1}A$, то $\operatorname{rank} P \leqslant m$, а значит он равен m (ответы на вопросы (а) — нет, (б) — да).

Если $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} B$, то $AB = 0$, что невозможно, так как матрица AB невырожденная (ответ на вопрос (в) — нет).

Если $x \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} B$, то $ABx = 0$, а так как AB невырожденная, то и $x = 0$ (ответ на вопрос (г) — да).

Для построения примера несимметричной матрицы P можно взять блочные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix},$$

где I — единичная матрица 2×2. Тогда $AB = I$ и

$$P = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ответ на вопрос (д) — нет). Этот же пример подходит и для вопроса (ж), так как несимметричная матрица P не задает ортогональный проектор при стандартном скалярном произведении (ответ — нет).

Рассмотрим теперь матрицу $P^2 = B(AB)^{-1}AB(AB)^{-1}A = B(AB)^{-1}A = P$. Отсюда по характеристическому свойству проектора получаем, что матрица P задает оператор проектирования (ответ на вопрос (е) — да).

И наконец, так как P задает проектор, то ее образ является подпространством, на которое происходит проектирование, а ее ядро является подпространством, параллельно которому происходит проектирование. Если они ортогональны друг другу, то проектирование ортогональное (ответ на вопрос (з) — да).

17 Вступительный экзамен 2016 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

17.1 Тест

17.1.1 Первая часть теста

1. Определенный интеграл $\int_1^3 \frac{x\,dx}{(x^2-4)^2}$ равен

A	0
B	$1/15$
C	$\frac{1}{2}\ln(5/3)$
D	$\frac{1}{2}\ln 15$
E	не существует

2. Определенный интеграл $\int_1^e \ln x \, dx$ равен

A $\quad 1/e$

B $\quad 1$

C $\quad e$

D $\quad e-1$

E $\quad$ не существует

3. Неопределенный интеграл $\int \frac{3dx}{x^2+x-2}$ при $x \in (-2,1)$ равен

A $\quad \ln(1-x) - \ln(x+2) + C$

B $\quad \ln(2-x) - \ln(x+1) + C$

C $\quad \ln(1-x) + 2\ln(x+2) + C$

D $\quad \frac{6}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C$

E $\quad \frac{6}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right) + C$

4. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ равен

A $\quad \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{2x}}+1}{\sqrt{1+e^{2x}}-1}\right) + C$

B $\quad \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right) + C$

C $\quad 2\ln(\sqrt{1+e^{2x}}-1) + C$

D $\quad \operatorname{arctg}\sqrt{1+e^{2x}} + C$

E $\quad -\operatorname{arctg}\sqrt{1+e^{2x}} + C$

5. Предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2}\right)$ равен

A $\quad -1$

B $\quad 0$

C $\quad 1/3$

D $\quad 1$

E $\quad$ не существует

6. Предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$ равен

A $\quad 0$

B $\quad 1/3$

C $\quad 2/3$

D $\quad 1$

E $\quad$ не существует

7. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$ равен

A $\quad 0$

B $\quad 1/4$

C $\quad 1/2$

D $\quad 1$

E $\quad$ не существует

8. Пусть $x_n=\dfrac{n^n}{n!}$, $n=1,2,\ldots$. Тогда предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n+1}}$ равен

A $\quad 0$

B $\quad 1/e$

C $\quad 1$

D $\quad e$

E $\quad$ не существует

9. Дана функция $f(x,y)=y-2x$ и множество $M=\{(x,y)\colon y^2-4x^2=1\}$. Тогда

A $\quad$ функция $f(x,y)$ на множестве M достигает наибольшего значения

B $\quad$ функция $f(x,y)$ на множестве M достигает наименьшего значения

C $\quad$ множество значений функции $f(x,y)$ на множестве M является открытым множеством

D $\quad$ множество значений функции $f(x,y)$ на множестве M является замкнутым множеством

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Пусть M — подмножество числовой прямой. Известно, что существует граничная точка множества M, ему не принадлежащая. Тогда

A   множество M замкнутое

B   множество M открытое

C   множество M несчетное

D   множество M бесконечное

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой, и пусть $F(x)$ — ее первообразная на всей числовой прямой. Тогда

A   если $f(x)$ — периодическая функция, то $F(x)$ — периодическая функция

B   если $f(x)$ — нечетная функция, то $F(x)$ — четная функция

C   если $f(x)$ — четная функция, то $F(x)$ — нечетная функция

D   если $f(x)$ — ограниченная функция, то $F(x)$ — ограниченная функция

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Дана функциональная последовательность $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$. Обозначим через M множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, и для каждого $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда

A   последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на M

B   множество M ограничено и замкнуто

C   множество M ограничено и открыто

D   функция $f(x)$ является неограниченной на множестве M

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Множество $M \subset \mathbf{R}$ не имеет предельных точек. Тогда

A   множество M конечно

B   множество M бесконечно

C   множество M замкнуто

D   множество M открыто

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^n(x^2+y^2)}{n}$. Обозначим через M множество пар (x, y), для которых этот ряд сходится. Тогда

A   множество M замкнутое

B   множество M открытое

C   множество M ограниченное

D   множество M неограниченное

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. К кривой, заданной уравнением $2x^2 + y^2 = 3$, через точку $(1, 1)$ проведена касательная. Площадь треугольника, образованного отрезками, отсекаемыми касательной на координатных осях, и отрезком касательной между координатными осями, равна

A $9/4$

B 2

C $7/2$

D 3

E   числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

16. Функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы и непрерывны на множестве $[a, +\infty)$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на $(a, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$, то функция $f(x)g(x)$ равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

II. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, то функция $f(x)g(x)$ равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

III. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ ограничены и равномерно непрерывны на $[a, +\infty)$, то функция $f(x)g(x)$ равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

A   только II

B   только III

C   только I и II

D   только II и III

E   I, II и III

17. Даны два числовых ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда

A   если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится

B если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

C если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

D если $a_n > 0$ при всех n и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\ln n}$ расходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

18. Пусть $M \subset \mathbf{R}$ — множество на числовой прямой, такое что его дополнение $\mathbf{R} \setminus M$ является счетным множеством. Тогда

A все точки множества M — внутренние

B все точки множества M — граничные

C множество M не имеет изолированных точек

D множество M не имеет предельных точек

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Пусть $M \subset \mathbf{R}$ — непустое множество на числовой прямой, у которого нет изолированных точек. Тогда

A множество M — открытое

B множество M — замкнутое

C множество M содержит все свои предельные точки

D множество M содержится в множестве своих предельных точек

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, заданная на отрезке $[a, b]$; A, B — подмножества числовой прямой, такие, что $B = f(A)$. Тогда

A если B — открытое множество, то A — тоже открытое множество

B если A — замкнутое множество, то B — тоже замкнутое множество

C если B — отрезок (т. е. $B = [c, d]$ для некоторых $c, d \in \mathbf{R}$), то A тоже является отрезком

D если A — интервал (т. е. $A = (c, d)$ для некоторых $c, d \in [a, b]$), то B тоже является интервалом

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, заданная на всей плоскости $\mathbf{R}^2$, такая, что для любых x, y выполнено равенство
$$\lim_{a \to 0} \frac{f(ax, ay)}{a} = x + y.$$
Тогда

A функция f непрерывна в точке $(0, 0)$

B функция f дифференцируема в точке $(0, 0)$

C во всех точках (x, y), принадлежащих некоторой окрестности точки $(0, 0)$, существуют частные производные $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$

D функция $g(x) = f(x, 0)$ дифференцируема при $x = 0$, причем $g'(0) = 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, 1]$, $f(0) = 0$ и для всех $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$ выполнено неравенство $f(y) - f(x) \leqslant (y - x)^2$. Тогда

A при всех $x \in (0, 1)$ функция $f(x)$ дифференцируема, причем $f'(x) \leqslant 1$

B $f(1) < 0$

C функция $|f(x)|$ является неубывающей при $x \in [0, 1]$

D функция $f(x)$ непрерывна при всех $x \in [0, 1]$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Пусть при каждом $n = 1, 2, \ldots$ на отрезке $[a, b]$ задана функция $f_n(x)$, интегрируемая по Риману на $[a, b]$ и такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится при всех $x \in [a, b]$. Какие из следующих равенств (I, II, III) верны?

I. $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in [a,b]} |f_n(x)| = 0.$

II. $\displaystyle\int_a^b \left(\lim_{n \to \infty} |f_n(x)| \right) dx = 0.$

III. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f_n(x)| dx = 0.$

A только I

B только II

C только I и III

D I, II и III

E ни одно из равенств I, II, III не является верным

24. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$, $x(0) = x_0$, где $f(x)$ — функция, непрерывно дифференцируемая на всей числовой прямой. Тогда

A функция $x(t)$ — монотонная на своей области определения

B функция $x(t)$ — ограниченная на своей области определения

C функция $x(t)$ — непостоянная на своей области определения

D область определения функции $x(t)$ — вся числовая прямая

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Функция $f(x) = (x-1)^3(x+1)^3$

A ограничена сверху при $x \in \mathbf{R}$

B неограничена снизу при $x \in \mathbf{R}$

C достигает локального максимума ровно в двух точках

D достигает локального минимума ровно в трех точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

26. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите *ложное* утверждение:

A матрица A имеет три разных вещественных собственных числа

B у матрицы A для всех вещественных собственных чисел их геометрическая кратность совпадает с алгебраической

C ноль является собственным числом матрицы A, и размерность соответствующего собственного подпространства равна 2

D наибольшее вещественное собственное число матрицы A равно 2

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

27. Число инвариантных подпространств матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ равно

A 2

B 3

C 4

D 8

E бесконечно много

28. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ равен

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

29. В линейном пространстве даны две системы векторов $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Через L_X и L_Y обозначим линейные оболочки систем X и Y соответственно, а через $\dim L_X$ и $\dim L_Y$ — их размерности. Тогда

A если $\dim L_X \leqslant \dim L_Y$, то $n \leqslant m$

B если $n \leqslant m$, то $\dim L_X \leqslant \dim L_Y$ или система Y линейно зависимая

C если $n \leqslant m$, то $\dim L_X \leqslant \dim L_Y$ или система X линейно независимая

D если $n \neq m$, то $\dim L_X \neq \dim L_Y$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Квадратная матрица A трактуется как линейный оператор в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 4$, в котором задано стандартное скалярное произведение. Через X^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице X, и через $L^\perp$ обозначим ортогональное дополнение к подпространству L. Тогда

A если $A \neq A^T$, то $\operatorname{Ker} A \neq (\operatorname{Im} A)^\perp$

B если $A \neq A^T$, то $\operatorname{Ker} A \neq \operatorname{Ker} A^T$

C если $A \neq A^T$, то $\operatorname{Im} A \neq \operatorname{Im} A^T$

D если $A = A^T$, то $\operatorname{Im} A \neq \operatorname{Ker} A$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. Квадратная матрица A порядка $n \geqslant 1$, для которой существует базис в пространстве $\mathbf{R}^n$, состоящий из собственных векторов этой матрицы, называется *матрицей простой структуры*. Тогда

A если матрица A невырожденная, то она является матрицей простой структуры

B если матрица A имеет единственное собственное число 0, то она является матрицей простой структуры

C если матрица A ортогональная, то она является матрицей простой структуры

D если матрица A задает оператор проектирования, то она является матрицей простой структуры

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Даны матрицы A и B размера $m \times n$, где $m, n \geqslant 2$, у которых строки линейно независимые. Пусть a — столбец длины m, b — столбец длины n, а через x обозначим неизвестный столбец подходящей длины. Через X^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице X. Тогда

A система линейных уравнений $(AA^T)x = a$ имеет решение при любом a

B система линейных уравнений $(B^TB)x = b$ имеет решение при любом b

C система линейных уравнений $(AB^T)x = a$ при любом a имеет не более одного решения

D система линейных уравнений $(A^TB)x = b$ при любом b имеет не более одного решения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

33. Квадратная матрица A порядка $n \geqslant 2$ трактуется как линейный оператор в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. Для любого вектора x обозначим через $|x|$ его длину. Найдите *ложное* утверждение:

A если $A^TA = 0$, то $|Ax| \leqslant |x|$ для любого вектора x

B если $A^TA = I$, то $|Ax| \leqslant |x|$ для любого вектора x

C если $A^TA = A$, то $|Ax| \leqslant |x|$ для любого вектора x

D если $A^TA = A^T$, то $|Ax| \leqslant |x|$ для любого вектора x

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

34. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = y^3/(x^2+1)$, $y(0) = 1$ на своей области определения

A не имеет нулей

B имеет ровно один ноль

C имеет ровно два нуля

D имеет ровно четыре нуля

E имеет более четырех нулей

35. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на отрезке $[0,1]$, причем $f(0) < g(0)$, а $f(1) > g(1)$. Тогда

A уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не менее одного решения

B если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет решения, то таких решений нечетное число

C количество решений уравнения $f(x) = g(x)$ совпадает с количеством решений уравнения $f^2(x) = g^2(x)$

D если $f(0.5) = g(0.5)$, то количество решений уравнения $f(x) = g(x)$ на интервале $(0, 0.5)$ совпадает с количеством решений уравнения $f(x) = g(x)$ на интервале $(0.5, 1)$.

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Функция $f(x)$ определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой. Тогда

A функция $f(x)$ достигает наибольшего значения

B если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, то и функция $-f(x)$ достигает наибольшего значения

C если функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

D если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения.

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

37. Функция $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ на множестве $\{(x,y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$

A достигает наибольшего значения ровно в двух точках и достигает наименьшего значения ровно в двух точках

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках, но не достигает наименьшего значения

C достигает наименьшего значения ровно в двух точках, но не достигает наибольшего значения

D не достигает ни наименьшего, ни наибольшего значений

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

38. Функция $f(x,y,z) = 3\ln x + 2\ln y + \ln z$ на множестве $\{(x,y,z)\colon\ x > 0, y > 0, z > 0, 3x + 2y + z = 6\}$

A достигает наибольшего значения в единственной точке

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения ровно в трех точках

D достигает наибольшего значения более чем в трех точках

E не достигает наибольшего значения

39. Функция $f(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема на интервале $(0,1)$. Тогда

A функция $f(x)$ ограничена на интервале $(0,1)$

B функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на интервале $(0,1)$

C если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на интервале $(0,1)$, то существуют точки x и x', такие, что $x < x'$ и $f'(x) \geqslant f'(x')$

D если функция $f^2(x)$ достигает наибольшего значения по крайней мере в двух различных точках, то и функция $f(x)$ достигает наибольшего значения по крайней мере в двух различных точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

40. Функция $f(x)$ отображает отрезок $[0,1]$ в отрезок $[-1,0]$. Тогда

A существует точка $x \in [0,1]$ такая, что $f(x) < -x$

B существует точка $x \in [0,1]$ такая, что $f(x) \geqslant x$

C если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, то существует точка $x \in [0,1]$ такая, что $f(x) = x - 1$

D если функция $f(x)$ достигает наименьшего значения на отрезке $[0,1]$, то и функция $g(x) = \mathrm{tg}(\pi \cdot x)$ достигает наименьшего значения на отрезке $[0,1]$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17.1.2 Вторая часть теста

1. Дано множество $M = \{(x, y)\colon (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6) = 0\}$ и функция $f(x, y) = 3x + 4y$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наибольшего значения;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ не достигает на множестве M наименьшего значения;

Да Нет

в) у функции $f(x, y)$ на множестве M есть ровно два локальных минимума;

Да Нет

г) точка $(3/5, 4/5)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

д) точка $(9/5, -3/5)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

е) число локальных максимумов функции $f(x, y)$ на множестве M чётное;

Да Нет

ж) точка $(3, 3)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) в точке $(21/5, 13/5)$ функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M.

Да Нет

2. Дана последовательность функций

$$f_n(x) = \frac{x^n + 1}{x^{2n} + 1},$$

где $n = 1, 2, \ldots$, и $x \in \mathbf{R}$. Обозначим через M множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, и для $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда

а) множество M замкнуто;

Да Нет

б) существует ровно одно значение $x \in M$, при котором котором функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода;

Да Нет

в) уравнение $f(x) = x + 1$ имеет ровно одно решение при $x \in M$;

Да Нет

г) при любом $n = 1, 2, \ldots$ функция $f_n(x)$ является ограниченной;

Да Нет

д) при любом $n = 1, 2, \ldots$ функция $f_n(x)$ имеет ровно один строгий локальный минимум;

Да Нет

е) ни при каком $n = 1, 2, \ldots$ функция $f_n(x)$ не достигает на множестве M наименьшего значения;

Да Нет

ж) последовательность $\{f_n(x),\ n = 1, 2, \ldots\}$, сходится к $f(x)$ равномерно на интервале $(0, 1)$;

Да Нет

з) последовательность $\{f_n(x),\ n = 1, 2, \ldots\}$, сходится к $f(x)$ равномерно на интервале $(1, 2)$.

Да Нет

3. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & \alpha^2 \\ -\alpha^2 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1+\alpha & 1 \\ \alpha^2 & 1+\alpha & \alpha^2 \\ \alpha & 1+\alpha & \alpha \end{pmatrix},$$

где α — вещественный параметр. Подпространства $L \subset \mathbf{R}^3$ и $M \subset \mathbf{R}^3$ определяются как множества решений систем линейных уравнений $Ax = 0$ и $Bx = 0$ соответственно. Также в пространстве $\mathbf{R}^3$ задано стандартное скалярное произведение. Тогда

а) существует единственное α, при котором $L \cap M \neq \{0\}$;

Да Нет

б) существует ровно два значения α, при которых $L \cap M \neq \{0\}$;

Да Нет

в) существует единственное α, при котором $\mathbf{R}^3 = L + M$;

Да Нет

г) существует ровно два значения α, при которых $\mathbf{R}^3 = L + M$;

Да Нет

д) если размерность $\dim L > \dim M$, то $L \supset M$;

Да Нет

е) если размерность $\dim L = \dim M$, то $\mathbf{R}^3 = L + M$;

Да Нет

ж) если подпространства L и M ортогональны друг другу, то $\mathbf{R}^3$ разлагается в прямую сумму L и M;

Да Нет

з) если $\mathbf{R}^3$ разлагается в прямую сумму L и M, то подпространства L и M ортогональны друг другу.

Да Нет

4. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\dot{x} = \frac{\alpha x}{t} + t^{\beta}, \quad x(1) = x_1,$$

где x_1, α и β — вещественные параметры. Тогда

а) при любых значениях параметров функция $x(t)$ определена при всех $t > 0$;

Да Нет

б) существует комбинация значений параметров, при которой функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

в) существует комбинация значений параметров, при которой функция $x(t)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

г) существует комбинация значений параметров, при которой $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$;

Да Нет

д) существует комбинация значений параметров, при которой $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ конечен, но не равен нулю;

Да Нет

е) если $x_1 < 0$, то $x(t) < 0$ везде на своей области определения;

Да Нет

ж) если $\alpha = \beta = x_1 = 2$, то $x(2) = 16$;

Да Нет

з) если $\alpha = 3$ а $\beta = 2$, то при любом x_1 предел $\lim\limits_{t\to+0} x(t) = 0$.

Да Нет

5. Функция $f(x)$ задана формулой

$$f(x) = \int_{x-1}^{x} g(t)dt,$$

где

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2 + \alpha t}{|t|}, & \text{если } t \neq 0, \\ 0, & \text{если } t = 0, \end{cases}$$

и α — вещественный параметр. Тогда

а) для любого α функция $f(x)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) для любого α функция $f(x)$ непрерывна на своей области определения;

Да Нет

в) для любого α функция $f(x)$ дифференцируема на своей области определения;

Да Нет

г) существует α, при котором функция $f(x)$ является ограниченной;

Да Нет

д) существует α, при котором функция $f(x)$ является выпуклой на своей области определения;

Да Нет

е) для любого α точка $x = 1/2 - \alpha$ является точкой локального минимума функции $f(x)$;

Да Нет

ж) для любого α у функции $f(x)$ существует единственная точка локального минимума;

Да Нет

з) для любого α график функции $f(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

17.2 Ответы и решения теста

17.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. E. **2.** B. **3.** A. **4.** B. **5.** A. **6.** B. **7.** C. **8.** B. **9.** C. **10.** D. **11.** B. **12.** E. **13.** C. **14.** C. **15.** A. **16.** D. **17.** C. **18.** C. **19.** D. **20.** B. **21.** E. **22.** C. **23.** B. **24.** A. **25.** E. **26.** C. **27.** D. **28.** C. **29.** B. **30.** D. **31.** D. **32.** A. **33.** E. **34.** A. **35.** E. **36.** E. **37.** A. **38.** A. **39.** C. **40.** C.

17.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Заметим, что множество является объединением двух множеств: $M_1 = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ и $M_2 = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = (x-3)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0\}$. Как видим, каждое множество представляет собой окружность, поэтому они оба компактные. Следовательно, и множество M компактное, а значит непрерывная функция $f(x, y)$ достигает на M наибольшего и наименьшего значений (ответ на вопрос (а) — да, на вопрос (б) — нет).

Воспользуемся тем, что любая точка локального экстремума на объединении множеств $M_1 \cup M_2$ является точкой экстремума хотя бы на одном из множеств M_1 и M_2, и исследуем функцию $f(x, y)$ на множествах M_1 и M_2 по отдельности.

Функция Лагранжа на множестве M_1:

$$L = 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Условия первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 3 + 2\lambda x = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4 + 2\lambda y = 0,$$

откуда, исключив λ, получаем соотношение $3y = 4x$. Подставляя его в уравнение множества, получаем две точки: $(-3/5, -4/5)$, $\lambda = 5/2$, $f(x, y) = -5$ и $(3/5, 4/5)$, $\lambda = -5/2$, $f(x, y) = 5$. Подставив эти точки в уравнение для множества M_2, получаем, соответственно, $(-3/5)^2 + (-4/5)^2 - 6 \cdot (-3/5) - 2 \cdot (-4/5) + 6 = 61/5 \neq 0$ и $(3/5)^2 + (4/5)^2 - 6 \cdot (3/5) - 2 \cdot \cdot (4/5) + 6 = 9/5 \neq 0$. Это значит, что если эти точки являются точками локального экстремума функции $f(x, y)$ на M_1, то они являются точками локального экстремума и на всем множестве M.

Функция Лагранжа на множестве M_2:

$$L = 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6).$$

Условия первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 3 + \lambda(2x - 6) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4 + \lambda(2y - 2) = 0,$$

откуда, исключив λ, получаем соотношение $3(y-1) = 4(x-3)$. Подставляя его в уравнение множества, получаем две точки: $(9/5, -3/5)$, $\lambda = 5/4$, $f(x, y) = 3$ и $(21/5, 13/5)$, $\lambda = = 5/4$, $f(x, y) = 23$. Подставив эти точки в уравнение для множества M_1, получаем, соответственно, $(9/5)^2 + (-3/5)^2 - 1 = 13/5 \neq 0$ и $(21/5)^2 + (13/5)^2 - 1 = 117/5 \neq 0$. Это значит, что если эти точки являются точками локального экстремума функции $f(x, y)$ на M_2, то они являются точками локального экстремума и на всем множестве M.

Таким образом, точка $(-3/5, -4/5)$ является точкой глобального, а значит и локального минимума, а точка $(21/5, 13/5)$ является точкой глобального, а значит и локального максимума (ответ на вопрос (з) — да).

В точке $(3, 3)$ не выполняется условие первого порядка, поэтому это не экстремум (ответ на вопрос (ж) — нет).

Рассмотрим две оставшиеся точки и проверим, выполняется ли достаточное условие экстремума. Опять же, достаточно проверять условие второго порядка на соответствующем подмножестве M_1 или M_2.

Рассмотрим точку $(3/5, 4/5)$ на множестве M_1. Вторая производная функции Лагранжа

$$D^2L = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица отрицательно определена, поэтому точка $(3/5, 4/5)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на M_1, а значит и на M (ответ на вопрос (г) — нет).

Рассмотрим точку $(9/5, -3/5)$ на множестве M_2. Вторая производная функции Лагранжа

$$D^2L = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица положительно определена, поэтому точка $(9/5, -3/5)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на M_2, а значит и на M (ответ на вопрос (д) — да).

Также получилось, что у функции $f(x, y)$ по два локальных минимума и максимума на множестве M, поэтому ответы на вопросы (в) — да и (е) — да.

На рисунке 17 изображено множество M, стационарные точки и линии уровня функции $f(x, y)$.

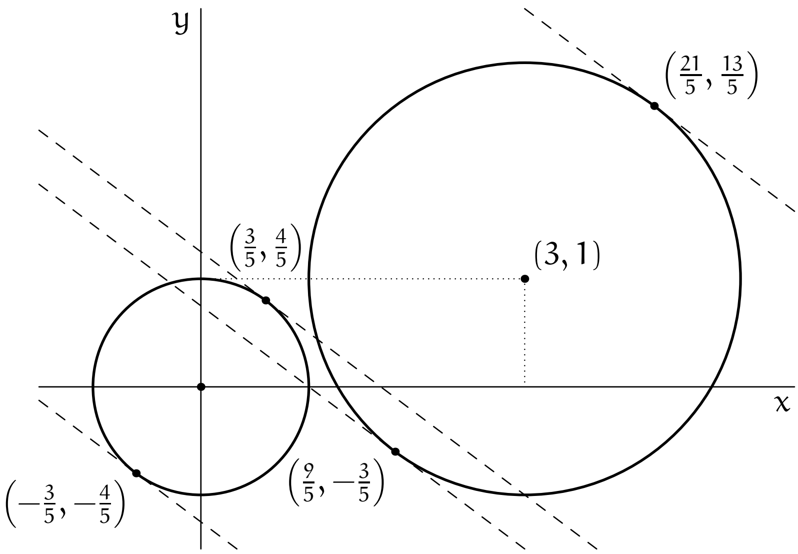


Рис. 17. Множество M и линии уровня функции $f(x, y)$

Задача 2. При $|x| > 1$ знаменатель растет при $n \to \infty$ быстрее, чем числитель, так что $f(x) = 0$. При $|x| < 1$ знаменатель и числитель стремятся к 1, так что $f(x) = 1$. При $x = -1$ знаменатель равен 2, а числитель — то 2, то 0, в зависимости от четности n, так что значение $f(-1)$ не определено. При $x = 1$ знаменатель и числитель равны 2, так что $f(1) = 1$. Таким образом,

$$M = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty), \quad f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1; \\ 1, & -1 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

(см. рис. 18). Функция $f_n(x)$ стремится к 0 при $x \to \pm\infty$, равна 1 при $x = 0$ и $x = 1$;

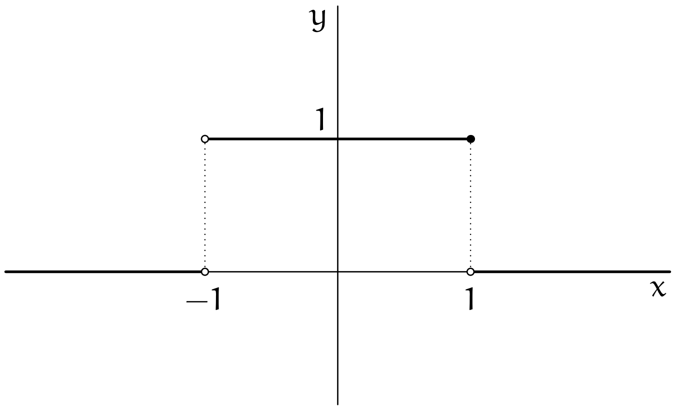


Рис. 18. График функции $f(x)$

$f_n(-1) = 1$ при четных n и 0 при нечетных n. Производная

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1 - 2x^n - x^{2n})}{(x^{2n} + 1)^2}$$

принимает нулевое значение при $x^n = -1 + \sqrt{2}$, $x^n = -1 - \sqrt{2}$ или $x = 0$. При этом в первом случае $f_n(x) = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$, во втором случае, реализующемся только при нечетных n, $f_n(x) = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$, а в третьем случае $f_n(x) = 1$. Только эти точки могут быть точками локальных экстремумов, и только в них может достигаться наибольшее или наименьшее значение функции $f_n(x)$.

Таким образом, ответы на вопросы следующие:

а) нет, так как -1 — предельная точка множества M, не принадлежащая ему;

б) да, так как всего существует две точки разрыва, 1 и -1, но только одна из них, 1, принадлежит множеству M;

в) да, поскольку значение $f(-1)$ не определено и $f(0) = 1$;

г) да, поскольку $f_n(x)$ — непрерывная функция, стремящаяся к 0 при $x \to \pm\infty$;

д) да, поскольку, как показывает сравнение значений функции $f_n(x)$ в критических точках, при четных n значение $x = 0$ — локальный минимум, $x = \pm\big(-1 + \sqrt{2}\big)^{1/n}$ — локальные максимумы; при нечетных n $x = \big(-1 - \sqrt{2}\big)^{1/n}$ — локальный (и глобальный) минимум, $x = \big(-1 + \sqrt{2}\big)^{1/n}$ — локальный максимум, а значение $x = 0$ не является локальным экстремумом (см. рис. 19 и 20);

е) нет, так как при нечетных n наименьшее значение достигается в точке $x = \big(-1 - \sqrt{2}\big)^{1/n}$ (при четных n — не достигается);

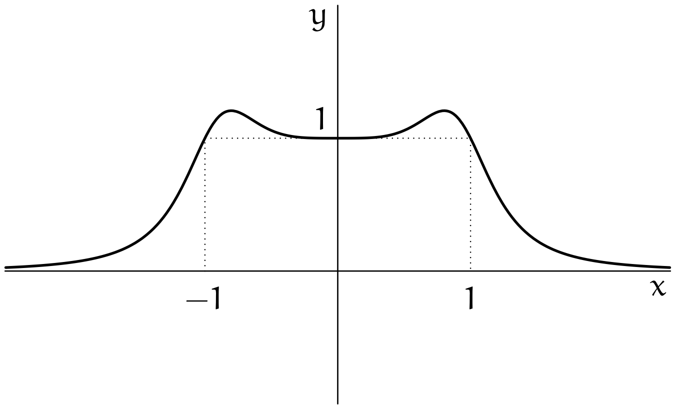


Рис. 19. График функции $f_n(x)$ для $n = 4$

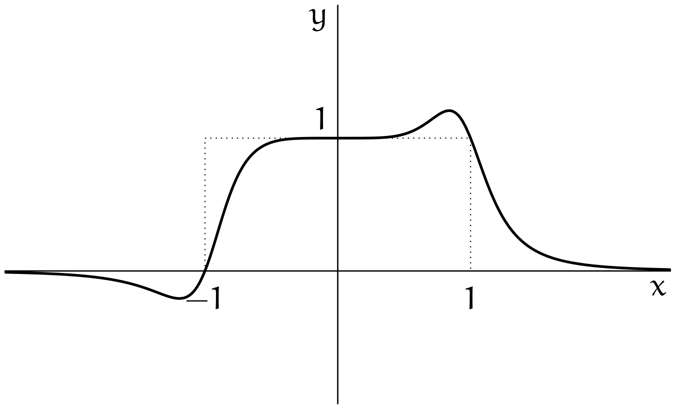


Рис. 20. График функции $f_n(x)$ для $n = 5$

ж) нет, так как максимум величины $|f_n(x) - f(x)|$ на $(0,1)$ достигается в точке $x = = \left(-1-\sqrt{2}\right)^{1/n}$ и равен $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ независимо от n;

з) нет, так как точная верхняя грань величины $|f_n(x) - f(x)|$ на $(1,2)$ равна 1 ($|f_n(x) - f(x)| \to 1$ при $x \to 1$ справа), а значит, не стремится к нулю при $n \to +\infty$.

Задача 3. Рассмотрим матрицу A и заметим, что ее вторая и третья строки пропорциональны друг другу (коэффициент пропорциональности равен $-\alpha$). Поэтому ранг матрицы A не превосходит двух при любых значениях α. Если теперь рассмотреть угловой минор второго порядка, то он равен

$$\det\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\alpha^2 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 - \alpha^3 = \alpha^2(1-\alpha).$$

Этот минор не равен нулю при $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$, и ранг матрицы A при этом равен 2. При $\alpha = 0$ матрица A равна

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

и ее ранг равен 1. Решив систему $Ax = 0$, получаем, что пространство L равно линейной оболочке

$$L = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \alpha = 0.$$

При $\alpha = 1$ матрица A равна

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

и ее ранг тоже равен 1. Решив соответствующую систему, получаем

$$L = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \alpha = 1.$$

Если же $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$, то решив систему $Ax = 0$ (например, методом Гаусса), получаем, что

$$L = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1+\alpha\\1\end{pmatrix}\right), \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq 1.$$

Вычислим теперь определитель матрицы B:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\alpha^2 & 1+\alpha & 1\\\alpha^2 & 1+\alpha & \alpha^2\\\alpha & 1+\alpha & \alpha\end{pmatrix} &= \alpha(1+\alpha)\det\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 1\\\alpha & 1 & \alpha^2\\1 & 1 & \alpha\end{pmatrix} =\\&= \alpha(1+\alpha)(\alpha^2+\alpha^2+\alpha-1-\alpha^2-\alpha^3) =\\&= -\alpha(1+\alpha)(1-\alpha)^2(1+\alpha) =\\&= -\alpha(1-\alpha)^2(1+\alpha)^2.\end{aligned}$$

Как видим, при $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq -1$ он не равен нулю, и соответствующее множество решений $M = \{0\}$.

При $\alpha = 0$ матрица B равна

$$B = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} B = 2, \quad M = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right).$$

При $\alpha = 1$ матрица B равна

$$B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 2 & 1\end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} B = 1, \quad M = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}\right).$$

При $\alpha = -1$ матрица B равна

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} B = 1, \quad M = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Теперь можно ответить на вопросы. Ответ (а) — нет, (б) — да ($\alpha = 0$ и $\alpha = 1$). Ответ (в) — нет, (г) — да ($\alpha = 1$ и $\alpha = -1$). Неравенство $\dim L > \dim M$ выполняется при $\alpha \neq -1$ и $\alpha \neq 1$. В каждом из этих случаев $L \supset M$, поэтому ответ (д) — да. Равенство $\dim L = \dim M$ выполняется только при $\alpha = 1$, нетрудно видеть, что при этом $\mathbf{R}^3 = L + M$, и ответ (е) — да. Контрпримером к вопросу (ж) служит случай $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq -1$, когда $M = \{0\}$, а $\dim L = 2$, то есть ответ (ж) — нет. И наконец, R^3 разлагается в прямую сумму L и M только в случае $\alpha = -1$. Нетрудно видеть, что при этом L и M действительно ортогональны друг другу, то есть ответ (з) — да.

Задача 4. Так как уравнение является линейным, то его решение определено на максимальном интервале (содержащем точку $t = 1$), для которого правая часть определена, то есть на $(0, +\infty)$. Поэтому ответ на вопрос (а) — да, на вопрос (б) — нет (заметим, что при $\alpha = 0$ правая часть уравнения тоже не определена при $t = 0$).

Решим это уравнение. Начнем с однородного:

$$\frac{dx}{x} = \frac{\alpha}{t} \implies \ln|x| = \alpha \ln|t| = \alpha \ln t,$$

откуда получаем, что $x(t) = Ct^\alpha$.

Теперь применим метод вариации постоянной, чтобы найти частное решение неоднородного уравнения. Положим $C = C(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \dot{C}(t)t^\alpha + C(t)\alpha t^{\alpha-1} = \frac{\alpha C(t)t^\alpha}{t} + t^\beta, \\ &\dot{C}(t) = t^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда можно получить, например, что $C(t) = \ln t$ при $\alpha = 1 + \beta$, и $C(t) = \dfrac{t^{\beta-\alpha+1}}{\beta - \alpha + 1}$ при $\alpha \neq 1 + \beta$. Подставив эти выражения обратно, получим общее решение неоднородного уравнения:

$$x(t) = \begin{cases} t^\alpha \ln t + Ct^\alpha, & \text{при } \alpha = 1 + \beta, \\ \dfrac{t^{\beta+1}}{\beta - \alpha + 1} + Ct^\alpha, & \text{при } \alpha \neq 1 + \beta. \end{cases}$$

Теперь подставим начальное условие. (1) $\alpha = 1 + \beta$: $x_1 = 1^\alpha \ln 1 + C1^\alpha = C$; (2) $\alpha \neq 1 + \beta$: $x_1 = \dfrac{1^{\beta+1}}{\beta - \alpha + 1} + Ct^\alpha = \dfrac{1}{\beta - \alpha + 1} + C$, откуда находим решение задачи Коши:

$$x(t) = \begin{cases} (\ln t + x_1)t^\alpha, & \text{при } \alpha = 1 + \beta, \\ \dfrac{t^{\beta+1}}{\beta - \alpha + 1} + \left(x_1 - \dfrac{1}{\beta - \alpha + 1}\right)t^\alpha, & \text{при } \alpha \neq 1 + \beta. \end{cases}$$

Рассмотрим случай $\alpha = \beta = -1$, $x_1 = 1$. В этом случае $x(t) \equiv 1$, то есть ответ на вопрос (в) — да. Кроме того, $x(t) \to 1$ при $t \to +\infty$, поэтому ответ на вопрос (д) — да.

Рассмотрим случай $\alpha = -1$, $\beta = -2$, x_1 — любое. Тогда $x(t) = \dfrac{\ln t + x_1}{t} \to 0$ при $t \to +\infty$, и ответ на вопрос (г) — да.

Рассмотрим случай $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $x_1 = -1$. Решение $x(t) = \ln t - 1 \to +\infty$ при $t \to +\infty$, и ответ на вопрос (е) — нет.

Подставим $\alpha = \beta = x_1 = 2$: $x(t) = t^3/1 + (2 - 1/1)t^2 = t^3 + t^2$. То есть $x(2) = 2^3 + 2^2 = 12$ (ответ на вопрос (ж) — нет).

Если $\alpha = 3$, $\beta = 2$, то решение равно $x(t) = (\ln t + x_1)t^3$. Так как t^3 стремится к нулю быстрее, чем $\ln t$ стремится к бесконечности при $t \to +0$, то ответ на вопрос (з) — да.

Задача 5. Упростим выражение для функции $g(t)$. Для этого заметим, что $t^2/|t| = |t|$ и $t/|t| = \operatorname{sign} t$, откуда получим выражение

$$g(t) = \begin{cases} -t - \alpha & \text{при } t < 0, \\ 0 & \text{при } t = 0, \\ t + \alpha & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция $g(t)$ определена на всей прямой $\mathbf{R}$ и непрерывна только при $\alpha = 0$ (иначе у нее появляется разрыв в точке $t = 0$). На рисунке 21 приведен график функции $g(t)$ для $\alpha = -0.4$.

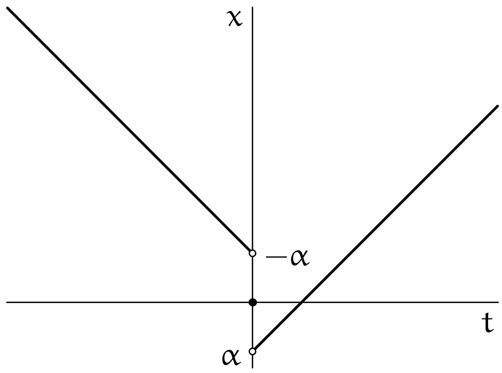


Рис. 21. График функции $g(t)$ для $\alpha = -0.4$

Теперь найдем функцию $f(x)$. При $x \leqslant 0$

$$f(x) = \int_{x-1}^{x} (-t - \alpha)dt = (-t^2/2 - \alpha t)\Big|_{x-1}^{x} = -x - \alpha + 1/2.$$

При $x \geqslant 1$

$$f(x) = \int_{x-1}^{x} (t + \alpha)dt = (t^2/2 + \alpha t)\Big|_{x-1}^{x} = x + \alpha - 1/2.$$

И, наконец, при $0 < x < 1$

$$f(x) = \int_{x-1}^{0} (-t - \alpha)dt + \int_{0}^{x} (t + \alpha)dt =$$
$$= (-t^2/2 - \alpha t)\Big|_{x-1}^{0} + (t^2/2 + \alpha t)\Big|_{0}^{x} = x^2 + (2\alpha - 1)x - \alpha + 1/2$$

(график функции $f(x)$ для $\alpha = -0.4$ изображен на рисунке 22).

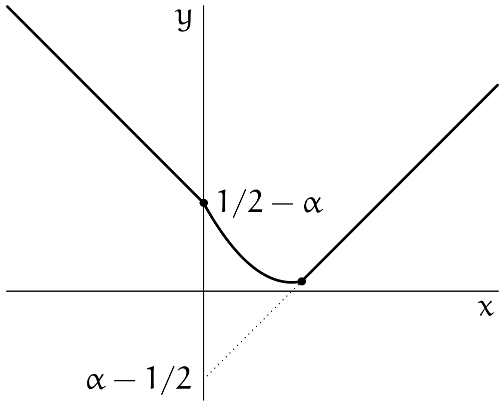


Рис. 22. График функции $f(x)$ для $\alpha = -0.4$

Таким образом, функция $f(x)$ определена при всех $x \in \mathbf{R}$ (ответ на вопрос (а) — да). Также из линейности функции $f(x)$ на $(-\infty, 0]$ и $[1, +\infty)$ следует, что у нее существуют две наклонные асимптоты (ответ на вопрос (з) — да). Далее, заметим, что по построению вне точек $x = 0$ и $x = 1$ функция $f(x)$ непрерывна, а также непрерывна слева в точке $x = 0$ и справа в точке $x = 1$. Пределы

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0}(x^2 + (2\alpha - 1)x - \alpha + 1/2) = -\alpha + 1/2 = -0 - \alpha + 1/2 = f(0)$$

и

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}(x^2 + (2\alpha - 1)x - \alpha + 1/2) = \alpha + 1/2 = 1 + \alpha - 1/2 = f(1),$$

откуда следует непрерывность в точках $x = 0$ и $x = 1$, и ответ на вопрос (б) — да.

Рассмотрим теперь производную справа и слева в точке $x = 0$.

$$f'(0-0) = (-x - \alpha + 1/2)' = -1,$$
$$f'(0+0) = (x^2 + (2\alpha - 1)x - \alpha + 1/2)' = 2x + 2\alpha - 1 = 2\alpha - 1.$$

Эти выражения совпадают только при $\alpha = 0$. Таким образом, не при всех α функция $f(x)$ дифференцируемая (ответ на вопрос (в) — нет).

Далее, предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, поэтому ответ на вопрос (г) — нет.

Найдем также производную слева и справа в точке $x = 1$.

$$f'(1-0) = (x^2 + (2\alpha - 1)x - \alpha + 1/2)' = 2x + 2\alpha - 1 = 2\alpha + 1,$$
$$f'(1+0) = (x + \alpha - 1/2)' = 1$$

(график производной при $\alpha = -0.4$ изображен на рисунке 23).

Как видно, в этой точке производная существует тоже только при $\alpha = 0$. При этом она равна

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } t \leqslant 0, \\ 2x - 1 & \text{при } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{при } t \geqslant 1, \end{cases}$$

то есть, монотонно не убывает. Отсюда следует, что при $\alpha = 0$ функция $f(x)$ выпуклая (ответ на вопрос (д) — да).

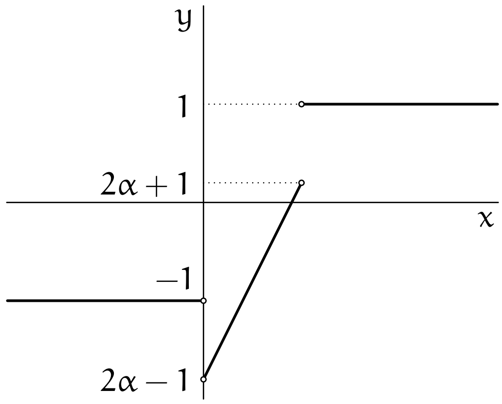


Рис. 23. График функции $f'(x)$ для $\alpha = -0.4$

Далее, легко видеть, что при $x > 1$ функция $f(x)$ строго возрастает. Поэтому, например, при $\alpha < -1/2$ точка $x = 1/2 - \alpha$ никак не может быть точкой локального минимума функции $f(x)$ (ответ на вопрос (е) — нет).

Наконец, рассмотрим производную $f'(x)$ при всех значениях α:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } t \leqslant 0, \\ 2x + 2\alpha - 1 & \text{при } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{при } t \geqslant 1. \end{cases}$$

Как можно заметить, производная меняет знак всего один раз, с отрицательного на положительный. При $\alpha \leqslant -1$ это происходит в точке $x = 1$, при $\alpha \geqslant 1$ — в точке $x = -1$, и при $-1 < \alpha < 1$ в точке $1/2 - \alpha$. Таким образом, у функции $f(x)$ действительно существует единственная точка локального минимума (она же является и точкой глобального минимума), и ответ на вопрос (ж) — да.

18 Вступительный экзамен 2017 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 3 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

18.1 Тест

18.1.1 Первая часть теста

1. Множество $M \subset \mathbf{R}$ имеет ровно пять граничных точек. Тогда

A	множество M конечно
B	множество M бесконечно
C	множество M замкнуто
D	множество M не замкнуто
E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Пусть $\{x_n\}$ — неограниченная последовательность. Тогда

A множество значений последовательности $\{x_n\}$ не имеет точной верхней грани

B множество значений последовательности $\{x_n\}$ не имеет точной нижней грани

C если $x_n \neq 0$, то последовательность $\{1/x_n\}$ является ограниченной

D последовательность $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, такую что $x_{k_n} > n$ или $x_{k_n} < -n$ для всех n

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Пусть $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + (2\sin x)^{2n}}$, $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим через M множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, и для каждого $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда

A функция $f(x)$ ограничена на множестве M

B функция $f(x)$ имеет разрывы первого и второго рода

C множество, где производная $f'(x)$ не существует, конечно

D для любого числа a уравнение $f(x) = a$ имеет решение

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Квадратная матрица P порядка n задаёт оператор проектирования в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 2$. Кроме того в $\mathbf{R}^n$ задано стандартное скалярное произведение. Тогда

A существует невырожденная матрица Q, такая что матрица $Q^{-1}PQ$ задаёт ортогональный проектор в $\mathbf{R}^n$

B существует ортогональная матрица Q, такая что матрица $Q^{-1}PQ$ задаёт ортогональный проектор в $\mathbf{R}^n$

C существует невырожденная матрица Q, такая что матрица $Q^{-1}PQ$ невырожденная

D существует ортогональная матрица Q, такая что матрица $Q^{-1}PQ$ вырожденная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Пусть r — максимальный ранг для всех квадратных матриц A порядка 5, таких что $A^2 = 0$. Тогда

A $r = 0$

B $r = 1$

C $r = 2$

D $r = 3$

E $r = 4$

6. Квадратная матрица A порядка $n \geqslant 2$ такова, что $A^2 = A^\mathsf{T}$, где через A^T обозначается матрица, транспонированная к A. Тогда

A матрица A задает оператор проектирования

B матрица A ортогональная

C матрица A вырожденная

D если λ — вещественное собственное число матрицы A, то $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Даны две матрицы A и B порядка $m \times k$ и $k \times n$ соответственно, где $m, k, n \geqslant 2$. Обозначим через b столбец длины m, а через x и y неизвестные столбцы длин n и k соответственно. Тогда

A если строки матрицы B линейно независимые, то системы $(AB)x = b$ и $Ay = b$ совместны одновременно

B если столбцы матрицы B линейно независимые, то системы $(AB)x = b$ и $Ay = b$ совместны одновременно

C если системы $(AB)x = b$ и $Ay = b$ совместны одновременно, то строки матрицы B линейно независимые

D если системы $(AB)x = b$ и $Ay = b$ совместны одновременно, то столбцы матрицы B линейно независимые

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Обозначим через A^T матрицу, транспонированную к матрице A, а через $\operatorname{Ker} X$ — ядро матрицы X. Тогда

A если $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$, то $AB = BA$

B если $AB = BA$, то $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$

C если $AA^\mathsf{T} = A^\mathsf{T}A$, то $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^\mathsf{T}$

D если $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^\mathsf{T}$, то $AA^\mathsf{T} = A^\mathsf{T}A$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть A — матрица размера $m \times n$, где $m, n \geqslant 2$, b — столбец длины m и x — неизвестный столбец длины n. Найдите *ложное* утверждение.

A если $m < n$ и система $Ax = b$ совместна при любом b, то столбцы матрицы A образуют базис в $\mathbf{R}^m$

B если $m > n$ и система $Ax = b$ совместна при любом b, то столбцы матрицы A образуют базис в $\mathbf{R}^m$

C если $m = n$ и система $Ax = b$ совместна при любом b, то строки матрицы A образуют базис в $\mathbf{R}^m$

D если $m = n$ и существует b такое, что система $Ax = b$ несовместна, то строки матрицы A не образуют базис в $\mathbf{R}^m$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

10. Предел $\lim\limits_{x\to 0+}\int_x^1 \dfrac{t-\ln(t+1)}{t^2}dt$ равен

A $\ln 2$

B $-1+\ln 2$

C $-1+\ln 4$

D $-\infty$

E величине, отличной от A, B, C, D, или не существует.

11. Пусть $f_n(x) = \dfrac{n\ln(1+x)}{nx+1}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, где $x \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

A функция f непрерывна на множестве $[0, +\infty)$

B последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ равномерно на множестве $(0, +\infty)$

C правая производная $f'(0+)$ существует и равна $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0+)$

D интеграл $\int_0^1 f(x)dx$ существует и равен $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^4-\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^4}{x}$ равен

A 2

B 4

C 6

D 8

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, либо не существует

13. Интеграл $\int_{-1}^{1}(4x^2-1)\sqrt{1-x^2}\,dx$ равен

A -1

B 0

C 1

D $3/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, либо не существует

14. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)}-x\right)$ равен

A $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$

B $\dfrac{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1}{3}$

C 0

D 3

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, либо не существует

15. Пусть $f_n(x)=n\ln\left(1+\dfrac{x^2+x+1}{n(2x^2+x+2)}\right)$, $n=1,2,\ldots$. Обозначим через M множество тех $x\in\mathbf{R}$, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, и для каждого $x\in M$ обозначим $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. Тогда

A множество M ограничено

B функция $f(x)$ чётна

C в точке $x=1$ функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на множестве M

D функция $f(x)$ не ограничена на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+n^2}+\frac{n}{4+n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

равен

A π

B $\pi/2$

C $\pi/3$

D $\pi/4$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Сумма ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+5n}-\frac{1}{3+5n}+\frac{1}{5+5n}\right)$$

равна

A 3.5

B 35.5

C $15.5+2\ln 2$

D числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

18. Пусть A — непустое подмножество $\mathbf{R}$. Выберите *ложное* утверждение

A A замкнутое тогда и только тогда, когда A не содержит ни одной внутренней точки

B A замкнутое тогда и только тогда, когда каждая точка дополнения к A является внешней точкой A

C A замкнутое тогда и только тогда, когда A содержит все свои предельные точки

D A замкнутое тогда и только тогда, когда A содержит все свои граничные точки

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

19. Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{3/2}}$$

равна

A $\dfrac{\ln 2}{2^{3/2}}$

B $\dfrac{\ln 3}{3^{3/2}}$

C $\dfrac{\ln 4}{4^{3/2}}$

D числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

20. Интеграл $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$ равен

A $2-5/e$

B $3-4/e$

C $4-6/e$

D $1+1/e$

E числу, отличному от перечисленных в A–D

21. Функция $f(x,y)=2x^2+y^2$ на множестве $\{(x,y)\colon x^2+2y^2=2\}$

A достигает наименьшего значения в единственной точке

B достигает наименьшего значения ровно в двух точках

C достигает наименьшего значения ровно в четырех точках

D достигает наименьшего значения ровно в восьми точках

E не достигает наименьшего значения

22. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-e^{-x})-2x-5x^3/3}{\sin x-x^3/6}$

A равен -2

B равен -1

C равен 1

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

23. Числовая функция $f(x)$ задана на интервале $(0,1)$ и непрерывна в каждой его точке. Пусть $M=f((0,1))$ — образ интервала $(0,1)$. Тогда

A множество M открыто

B множество M не замкнуто

C множество M ограничено

D множество M имеет непустую границу

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^2\sin(1/n)$ равен

A 0

B 1

C e^2

D 4

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

25. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{2n+4}$ равен

A 0

B 1

C e^2

D e^4

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

26. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2(nx)\,dx$ равен

A 0

B π

C $\pi/4$

D $\pi/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

27. Наибольшее значение функции $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ на множестве $\{(x,y)\colon 2|x|+|y|=2\}$ равно

A 1

B 2

C 3

D 4

E не достигается

28. Пусть $f(x)$ — строго возрастающая непрерывная на $[0,+\infty)$ функция, причём известно, что $f(0)=0$. Пусть

$$I(a,b)=\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy,$$

где a, $b\geqslant 0$ Тогда

A $I(a,b)\geqslant\dfrac{af(a)+bf^{-1}(b)}{2}$

B $I(a,b)\leqslant\dfrac{af(a)+bf^{-1}(b)}{2}$

C $\quad I(a, b) \geqslant ab$

D $\quad I(a, b) \leqslant ab$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

29. Пусть $f(x)$ — значение переменной $y \in [-1, 1]$, при котором функция $g(y) = xy - y^2$ достигает максимума по $y \in [-1, 1]$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) являются истинными?

I. Функция $f(x)$ непрерывна при всех $x \in \mathbf{R}$.

II. Функция $f(x)$ дифференцируема при всех $x \in \mathbf{R}$.

III. Функция $f(x)$ — строго возрастающая на всей числовой прямой.

A $\quad$ только I

B $\quad$ только III

C $\quad$ I и II

D $\quad$ I и III

E $\quad$ I, II и III

30. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), причем $f(a) < f(b)$. Тогда

A $\quad$ функция $f(x)$ строго возрастает на отрезке $[a, b]$

B $\quad$ существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) > 0$

C $\quad$ функция $f'(x)$ непрерывна на интервале (a, b)

D $\quad f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{f(a) + f(b)}{2}$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. Пусть функция $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ обладает следующим свойством: для любых $x, y \in \mathbf{R}$ таких, что $x \neq y$, выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{|x-y|}$. Найдите *ложное* утверждение:

A $\quad$ функция $f(x)$ ограничена на всей числовой прямой

B $\quad$ функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой

C $\quad$ функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой

D $\quad$ функция $f(x)$ неубывающая на всей числовой прямой

E $\quad$ среди утверждений A, B, C, D есть ложное

32. Пусть $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — непрерывная функция, $M \subset \mathbf{R}$ — множество всех точек на числовой прямой, в которых функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на $\mathbf{R}$. Тогда множество M

A	состоит только из изолированных точек
B	замкнуто
C	ограничено сверху
D	непусто
E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

18.1.2 Вторая часть теста

1. Дана функция $f(x, y) = x^2 - y^2$ и множество $M = \{(x, y)\colon x^4 - a^2x^2 + y^2 = 0\}$, где a — положительный вещественный параметр. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на M в чётном числе точек;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на M в нечётном числе точек;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на M в чётном числе точек;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на M в нечётном числе точек;

Да Нет

д) точки $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ являются точками локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

е) точка $(0, 0)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

ж) при всех $a \geqslant 1$ точка $\left(\sqrt{\dfrac{a^2-1}{2}}, \sqrt{\dfrac{a^4-1}{4}}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) при всех $a < 1$ точка $\left(\sqrt{\frac{1-a^2}{2}}, \sqrt{\frac{1-a^4}{4}}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

Да Нет

2. Функция $f(x)$ задана равенством $f(x) = \int_{6x}^{x^2+8} \frac{dt}{\sqrt{|t|+2}}$. Тогда

а) функция $f(x)$ достигает наибольшего значения;

Да Нет

б) функция $f(x)$ достигает наименьшего значения;

Да Нет

в) уравнение $f(x) = 0$ имеет чётное число решений;

Да Нет

г) уравнение $f'(x) = 0$ имеет чётное число решений;

Да Нет

д) на отрезке $[0, 1]$ функция $f(x)$ убывает;

Да Нет

е) существует конечный предел $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$;

Да Нет

ж) на отрезке $[0, 5]$ есть точка локального минимума функции $f(x)$;

Да Нет

з) существует такое число $N > 0$, что при всех $x > N$ выполняется неравенство $f(x) > 6x$.

Да Нет

3. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = tx^2 + t$$

с начальным условием $x(0) = a$, где $a \in \mathbf{R}$ — параметр. Пусть множество $M \subset \mathbf{R}$ — область определения функции $x(t)$. Тогда

а) множество M ограничено;

Да Нет

б) существует такое $a \in \mathbf{R}$, что функция $x(t)$ имеет разрыв второго рода в одной из точек множества M;

Да Нет

в) функция $x(t)$ является четной на множестве M;

Да Нет

г) $3 \notin M$;

Да Нет

д) график функции $x(t)$ не имеет точек перегиба;

Да Нет

е) функция $x(t)$ достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

ж) если $a = -1$, то $2 \in M$ и $x(2) > 1$;

Да Нет

з) если $a = 1$, то $2 \in M$ и $x(2) < 2$.

Да Нет

4. Семейство функций $\{f_n(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, для всех $x \in \mathbb{R}$ задано соотношением

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^{2n} + 1} - \sqrt[n]{|x^{2n} - 1|}\,.$$

Тогда

а) каждая функция $f_n(x)$ имеет два строгих локальных минимума;

Да Нет

б) каждая функция $f_n(x)$ имеет два строгих локальных максимума;

Да Нет

в) каждая функция $f_n(x)$ дифференцируема на всей вещественной оси;

Да Нет

г) для каждой функции $f_n(x)$ имеет место равенство производных $f'_n(2017) = f'_n(-2017)$;

Да Нет

д) конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ существует для всех $x \in \mathbb{R}$, кроме точек $x = 1$ и $x = -1$;

Да Нет

е) предельная функция $f(x)$ имеет на вещественной оси устранимые разрывы;

Да Нет

ж) последовательность $f_n(x)$ при $n \to \infty$ сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно на всей вещественной оси;

Да Нет

з) все положительные корни уравнения $f_n(x) = 1/2017$ при $n \to \infty$ сходятся к положительному корню уравнения $f(x) = 1/2017$.

Да Нет

18.2 Ответы и решения теста

18.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. E. **2.** D. **3.** E. **4.** A. **5.** C. **6.** D. **7.** A. **8.** C. **9.** A. **10.** C. **11.** D. **12.** D. **13.** B. **14.** A. **15.** C. **16.** D. **17.** E. **18.** A. **19.** D. **20.** A. **21.** B. **22.** B. **23.** E. **24.** B. **25.** D. **26.** D. **27.** D. **28.** C. **29.** A. **30.** B. **31.** E. **32.** B.

18.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Заметим, что уравнение, задающее множество M, можно представить в виде $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$. Далее, подставим это выражение в функцию $f(x, y)$ и получим, что для решения задачи достаточно исследовать поведение функции $g(x) = x^2 - x^2(a^2 - x^2) = x^4 + (1 - a^2)x^2$ при $|x| \leqslant a$.

Производная функции $g(x)$ равна

$$g'(x) = 4x^3 + 2(1 - a^2)x = 2x(2x^2 + (1 - a^2)).$$

Как видим, $g(x)$ имеет одну стационарную точку $x = 0$ при любом $a > 0$ (при этом $g(0) = 0$) и еще две стационарные точки $x = \pm\sqrt{\dfrac{a^2 - 1}{2}}$ при $a > 1$ (при этом $g(x) = -\dfrac{(a^2 - 1)^2}{4}$ в каждой из них). Также следует рассмотреть крайние точки отрезка $x = \pm a$, в которых тоже может достигаться наибольшее или наименьшее значение. Значение функции $g(a) = g(-a) = a^4 + a^2 - a^4 = a^2$. Сравнивая эти три значения, получаем, что наибольшее значение функция $g(x)$ достигает в точках $x = \pm a$, им соответствуют две точки $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ на множестве M. Если $a \neq 1$, то наименьшее значение достигается в точках $\pm\sqrt{\dfrac{a^2 - 1}{2}}$, которым соответствуют четыре точки множества M: $\left(\pm\sqrt{\dfrac{a^2 - 1}{2}}, \pm\sqrt{\dfrac{a^4 - 1}{4}}\right)$, а если $a = 1$, то эти четыре точки превращаются в одну точку $(0, 0)$. Таким образом, ответы на вопросы а) — «да», б) — «нет», в) — «нет», г) — «нет».

Далее, так как в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на M, эти точки являются точками локального максимума (ответ на вопрос д) — «да»).

Заметим, что при $a > 1$ функция $g(x) = x^2(x^2-(a^2-1)) < 0$ при малых $x \neq 0$. Поэтому ответ на вопрос е) — «нет».

Ответ на вопрос ж) — «да», что следует из того, что в точке $\left(\sqrt{\dfrac{a^2-1}{2}}, \sqrt{\dfrac{a^4-1}{4}}\right)$ достигается наименьшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M при $a \geqslant 1$.

И наконец, точка $\left(\sqrt{\dfrac{1-a^2}{2}}, \sqrt{\dfrac{1-a^4}{4}}\right)$ не является стационарной, поэтому в ней нет локального минимума или максимума (ответ на вопрос з) — «нет»).

Задача 2. Очевидно, что функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Поскольку подынтегральная функция $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{|t|+2}}$ строго положительная и непрерывная, то $f(x) > 0$, если $6x < x^2 + 8$, $f(x) < 0$, если $6x > x^2 + 8$ и $f(x) = 0$, если $6x = x^2 + 8$. Таким образом, $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (2, 4)$ и $f(2) = f(4) = 0$. Далее, по правилу Лейбница $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+10}} - \dfrac{6}{\sqrt{6|x|+2}}$. Очевидно, что $f'(x) < 0$ при $x \leqslant 0$. Если $x > 0$, то уравнение $f'(x) = 0$ равносильно уравнению (пропускаем рутинные вычисления)

$$h(x) = 6x^3 - 7x^2 = 90. \tag{1}$$

Заметим, что функция $h(x)$ отрицательна на интервале $(0, 7/6)$, положительна на интервале $(7/6, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. Далее, $h'(x) = 18x^2 - 14x = 18x(x - 7/9)$. Значит, на интервале $(7/9, +\infty)$ функция $h(x)$ строго возрастает, и поскольку $h(7/9) < 0$, то уравнение имеет единственное решение на $(0, +\infty)$, а значит и на всей числовой прямой. Так как $f'(2) = \dfrac{4}{\sqrt{14}} - \dfrac{6}{\sqrt{14}} < 0$, то единственный корень уравнения (1) принадлежит интервалу $(2, 4)$, и эта точка является точкой наименьшего значения функции $f(x)$. Получаем ответы: б) да, в) да, г) нет, д) да, ж) да.

Если $x < 0$, то

$$f(x) = \int_{6x}^{x^2+8} \frac{dt}{\sqrt{|t|+2}} > \int_{0}^{x^2+8} \frac{dt}{|t|+2} \geqslant \frac{x^2+8}{\sqrt{x^2+10}} > \sqrt{x^2+8}.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Ответ на вопрос а) нет, на вопрос е) нет.

Нетрудно видеть, что при $x > 0$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+10/x^2}} - \frac{6}{\sqrt{6|x|+2}} < 2.$$

Поэтому при $x \geqslant 4$ функция $f(x) \leqslant f(4) + 2(x-4) = 2x - 8$, что не превосходит $6x$ при всех $x \geqslant 4$. Ответ на вопрос з) нет.

Задача 3. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Перенеся в левую часть все, что зависит от x (заметим, что делить на $x^2 + 1$ можно при всех x), а в правую — все, что зависит от t, и интегрируя, получаем

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int t\,dt \;\Rightarrow\; \mathrm{arctg} x = \frac{t^2}{2} + C \;\Rightarrow\; x(t) = \mathrm{tg}\left(\frac{t^2}{2} + C\right),$$

где $C \in \mathbf{R}$ — произвольная постоянная, определяемая из начального условия:

$$x(0) = a = \mathrm{tg}\, C \;\Rightarrow\; C = \mathrm{arctg}\, a \;\Rightarrow\; x(t) = \mathrm{tg}\left(\frac{t^2}{2} + \mathrm{arctg}\, a\right).$$

Здесь значение t должно быть достаточно малым по абсолютной величине, чтобы на отрезке $[0, t]$ не было точек, при которых тангенс в правой части не определен. Это означает, что

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{t^2}{2} + \mathrm{arctg}\, a < \frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; |t| < \sqrt{\pi - 2\mathrm{arctg}\, a}.$$

Это неравенство задает множество M — область определения максимального (непродолжаемого) решения $x(t)$.

Ответы на п. а)–з) такие:

а) да, так как множество M $\left(-\sqrt{\pi - 2\mathrm{arctg}\, a}, \sqrt{\pi - 2\mathrm{arctg}\, a}\right)$ ограничено при всех $a \in$ $\in \mathbf{R}$;

б) нет, так как решение $x(t)$ — функция, дифференцируемая, а значит и непрерывная на всем множестве M и не может иметь разрыв второго рода;

в) да, так как функция $x(t)$ зависит только от t^2 и поэтому является четной на множестве M;

г) да, так как $\sqrt{\pi - 2\mathrm{arctg}\, a} < \sqrt{2\pi} < 3$, т.е. $3 \notin M$;

д) нет, так как при $a \ll 0$ функция

$$x''(t) = (t(1 + x(t)^2))' = 1 + x(t)^2 + 2tx(t)x'(t) = (1 + x(t)^2)(1 + 2t^2x(t))$$

принимает на M как положительные, так и отрицательные значения: при $t = 0$ $x''(t) =$ $= 1 + a^2 > 0$, а при $t = \sqrt{\pi/2}$ и $a \to -\infty$ величина $x''(t)$ стремится к $1 - \pi < 0$, так что при некотором $t \in M$ вторая производная функции $x(t)$ обращается в 0, меняя знак, и в этом месте график функции $x(t)$ имеет точку перегиба;

е) да, функция $x(t)$ достигает наименьшего значения на множестве M при $t = 0$, так как величина $x'(t) = t(1 + x(t)^2)$ положительна при $t > 0$ и отрицательна при $t < 0$;

ж) да: если $a = -1$, то множество $M = \left(-\sqrt{3\pi/2}, \sqrt{3\pi/2}\right)$ включает число 2, и $x(2) =$ $= \mathrm{tg}\,(2 - \pi/4) > 1$ (поскольку $2 - \pi/4 > \pi/4$);

з) нет: если $a = 1$, то $M = \left(-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}\right)$ и $2 \notin M$.

Задача 4. Отметим прежде всего, что функции $f_n(x)$ непрерывны на всей вещественной оси.

Найдем предельную функцию. Если $|x| > 1$ и $n > 1$, то

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= (x^{2n}+1)^{\frac{1}{n}} - (x^{2n}-1)^{\frac{1}{n}} = x^2\left(1+\frac{1}{x^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} - x^2\left(1-\frac{1}{x^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \\
&= x^2\left(1+\frac{1}{n}\frac{1}{x^{2n}}\right) - x^2\left(1-\frac{1}{n}\frac{1}{x^{2n}}\right) + o\left(\frac{1}{x^{2n-2}}\right) = \\
&= 2\frac{x^2}{n\,x^{2n}} + o\left(\frac{1}{x^{2n-2}}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Если $|x| < 1$, то $x^{2n} \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Если $|x| = 1$, то $f_n(x)\Big|_{|x|=1} = 2^{\frac{1}{n}} \to 1$ при $n \to \infty$. Таким образом, предельная функция $f(x)$ имеет вид

$$
f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| \neq 1, \\ 1, & |x| = 1. \end{cases} \tag{2}
$$

Отметим также, что $f_n(0) = 0$.

Найдем производную функции $f_n(x)$. Если $|x| > 1$, то

$$
\begin{aligned}
f_n'(x) &= \frac{1}{n}(x^{2n}+1)^{\frac{1}{n}-1}\cdot 2nx^{2n-1} - \frac{1}{n}(x^{2n}-1)^{\frac{1}{n}-1}\cdot 2nx^{2n-1} = \\
&= 2x^{2n-1}\left[(x^{2n}+1)^{\frac{1}{n}-1} - (x^{2n}-1)^{\frac{1}{n}-1}\right].
\end{aligned} \tag{3}
$$

Отметим, что эта производная положительна при $x < -1$ и отрицательна при $x > 1$, а при $|x| \to 1$ эта производная не имеет предела. Если $|x| < 1$, то

$$
\begin{aligned}
f_n'(x) &= \frac{1}{n}(1+x^{2n})^{\frac{1}{n}-1}\cdot 2nx^{2n-1} + \frac{1}{n}(1-x^{2n})^{\frac{1}{n}-1}\cdot 2nx^{2n-1} = \\
&= 2x^{2n-1}\left[(1+x^{2n})^{\frac{1}{n}-1} + (1-x^{2n})^{\frac{1}{n}-1}\right].
\end{aligned}
$$

Отметим, что эта производная положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$, при $|x| \to 1$ эта производная не имеет предела, а при $x = 0$ она обращается в ноль. Кроме того, следует отметить, что при $|x| \to \infty$ функции $f_n(x)$ монотонно стремятся к нулю при любом $n > 1$. Таким образом, исходя из знаков производной и асимптотик функций $f_n(x)$, можно сделать вывод о том, что каждая функция $f_n(x)$ при $n > 1$ обладает двумя строгими локальными максимумами в точках $x = \pm 1$ и одним строгим локальным минимумом в точке $x = 0$. Поэтому ответы на вопрос «а» — «нет», на вопрос «б» — «да».

Чтобы ответить на вопрос о дифференцируемости функций $f_n(x)$ на всей оси (вопрос «в»), найдем производную, например, в точке $x = 1$. Найдем вначале правую производную, т.е. предел при $h \to 0+$ от выражения

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\left((1+h)^{2n}+1\right)^{\frac{1}{n}} - \left((1+h)^{2n}-1\right)^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n}}}{h} =$$
$$= \frac{\left((1+2nh)+1+o(h)\right)^{\frac{1}{n}} - \left((1+2nh)-1+o(h)\right)^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n}}}{h} =$$
$$= \frac{2^{\frac{1}{n}}\left((1+nh)+o(h)\right)^{\frac{1}{n}} - \left(2nh+o(h)\right)^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n}}}{h} =$$
$$= \frac{2^{\frac{1}{n}}\left(1+h-1\right) - (2n)^{\frac{1}{n}}(h)^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n}} + o(h)}{h} =$$
$$= \frac{2^{\frac{1}{n}}h - (2n)^{\frac{1}{n}}(h)^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n}} + o(h)}{h} =$$
$$= 2^{\frac{1}{n}} - (2n)^{\frac{1}{n}}(h)^{\frac{1}{n}-1} + \frac{o(h)}{h}.$$

Первое слагаемое не зависит от h, последнее слагаемое стремится к нулю при $h \to 0+$, второе слагаемое имеет бесконечный предел при $h \to 0+$. Соответственно функции $f_n(x)$ недиффиренцируемы в точке $x = 1$. Аналогично можно показать, что в точке $x = -1$ производная также не существует. Поэтому ответ на вопрос «в» — «нет».

Теперь можно ответить на остальные вопросы.

На вопрос «г» ответом является «нет», поскольку, как видно из выражения (3), $f_n'(x)(2017) < 0$, а $f_n'(x)(-2017) > 0$.

На вопрос «д» ответом является «нет», поскольку предел существует для всех $x \in \mathbf{R}$, а предельная функция на всей вещественной оси дается формулой (2).

На вопрос «е», как видно из формулы (2), ответом является «да».

Что касается равномерной сходимости, то она, очевидно, отсутствует, поскольку если последовательность непрерывных на всей оси функций сходится равномерно, то предельная функция также должна быть непрерывной, а в нашем случае предельная функция разрывна. Соответственно на вопрос «ж» ответом является «нет».

Наконец, на вопрос «з» ответом является «нет», поскольку положительные корни уравнения $f_n(x) = 1/2017$ сходятся к точке $x = 1$ при $n \to \infty$, а уравнение для предельной функции $f(x) = 1/2017$ не имеет решения.

19 Вступительный экзамен 2018 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 3 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

19.1 Тест

19.1.1 Первая часть теста

1. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[4]{n}} \int_1^n \ln x \, dx$ равен

A	0
B	e
C	$\ln 2$
D	4
E	числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

2. Выберите истинное утверждение (все множества суть подмножества числовой прямой):

A пересечение любого числа компактных множеств является компактным множеством

B объединение не более чем счетного числа ограниченных множеств является ограниченным множеством

C пересечение любого числа дополнений к замкнутым множествам является дополнением к замкнутому множеству

D любое множество является пересечением конечного числа множеств, каждое из которых является либо открытым либо замкнутым

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Интеграл $\int_1^2 \frac{x+3}{3x^2-x^3}dx$ равен

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\ln 2$

C $\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\ln 2$

D $-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\ln 2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

4. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^4-\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^4}{x}$ равен

A 2

B 4

C 6

D 8

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, либо не существует

5. Пусть $\{x_n\}$ — неограниченная последовательность. Тогда

A множество значений последовательности $\{x_n\}$ не имеет точной верхней грани

B множество значений последовательности $\{x_n\}$ не имеет точной нижней грани

C если $x_n \neq 0$, то последовательность $\{1/x_n\}$ является ограниченной

D последовательность $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, такую что $x_{k_n} > n$ или $x_{k_n} < -n$ для всех n

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ равен

A 1

B -1

C e

D $1/e$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

7. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ и дифференцируема на интервале $(0,1)$. Тогда существует значение $c \in \mathbf{R}$, такое что функция $g(x) = f(x) + cx$

A достигает своего наибольшего значения на отрезке $[0,1]$ в одной из точек $x = 0$ или $x = 1$

B достигает своего наибольшего значения на отрезке $[0,1]$ в одной из его внутренних точек

C имеет ненулевую производную ($g'(x) \neq 0$) при всех $x \in (0,1)$

D имеет нулевую производную ($g'(x) = 0$) в некоторой точке $x \in (0,1)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[0,1]$, причем $f(0) > g(0)$ и $f(1) > g(1)$. Тогда

A если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет конечное количество решений, то это количество четное

B если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет бесконечное количество решений, то множество его решений несчетно

C если уравнение $f^2(x) = g^2(x)$ имеет решения, то и уравнение $f(x) = g(x)$ имеет решения

D если для некоторого $x_0 < 0.5$ выполнено $f(2x_0) = g(2x_0)$, то количество решений уравнения $f(x) = g(x)$ на интервале $(0, 2x_0)$ совпадает с количеством решений уравнения $f(x) = g(x)$ на интервале $(2x_0, 1)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей вещественной прямой, причем принимает значения разных знаков. Тогда

A функция $\operatorname{tg} f(x)$ определена на всей вещественной прямой

B функция $\operatorname{tg} f(x)$ определена не на всей вещественной прямой

C если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, то и функция $\operatorname{arctg} f(x)$ достигает наибольшего значения

D если функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = \dfrac{1-y^2}{2x}$ с начальным условием $y(2) = 3$. Выберите *ложное* утверждение:

A $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 1$

B $y'(1+\sqrt{2}) = -1$

C $y(3) = 2$

D $y(-3) = 1/2$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

11. График функции $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$, построенный на плоскости в координатах (x, y), имеет

A ровно одну точку перегиба

B точку касания с прямой $y = ax + b$ для любого $a \in \mathbf{R}$ при некотором $b \in \mathbf{R}$

C наклонную асимптоту $y = ax + b$ для некоторых $a, b \in \mathbf{R}$

D четное число точек пересечения с прямой $y = a$ при некотором $a \in \mathbf{R}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{\cos x} + \sin x\right)^{1/x}$ равен

A 1

B $\sqrt[4]{e^3}$

C e

D $\sqrt{e}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

13. Найдите *ложное* утверждение.

A если последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится, то она достигает своей точной верхней или точной нижней грани

B если последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ удовлетворяет условию $|a_{n+1} - a_n| < 1/2^n$, $n = 1, 2, \dots$, то она сходится.

C если последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ ограничена, то множество её частичных пределов не пусто

D если последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ монотонна и содержит сходящуюся подпоследовательность, то она сходится

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

14. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$ $(a > 0, b > 0, c > 0)$ равен

A e^{abc}

B $e^{(a+b+c)/3}$

C $\sqrt[3]{abc}$

D $\dfrac{a+b+c}{3}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

15. Множество $A \in \mathbf{R}$ содержится в множестве своих предельных точек. Тогда

A множество его граничных точек пусто

B множество его изолированных точек пусто

C множество A замкнуто

D множество A не замкнуто

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}\right)^{1/\ln x}$ равен

A 0

B 1

C e

D e^2

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

17. Пусть $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ — сходящаяся последовательность, $\{y_n, n = 1, 2, \dots\}$ — ограниченная последовательность. Обозначим через $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, z_n$ верхний предел последовательности $\{z_n, n = 1, 2, \dots\}$. Тогда

A $\quad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n + y_n) > \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$

B $\quad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n + y_n) < \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$

C $\quad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$

D $\quad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n + y_n)$ не существует

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

18. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Существует непрерывная на интервале $(0, 1)$ функция, множество значений которой есть $(1, +\infty)$.

II. Существует непрерывная на интервале $(0, 1)$ функция, множество значений которой есть $(0, 2) \cup (3, 5)$.

III. Существует непрерывная на интервале $(0, 1)$ функция, множество значений которой есть $[0, 2]$.

A $\quad$ только I

B $\quad$ только I и II

C $\quad$ только I и III

D $\quad$ I, II и III

E $\quad$ ни одно из утверждений I, II и III

19. Кривая на координатной плоскости задана уравнением $x^3 + y^3 = 9$. Через точку $(1, 2)$ проведена касательная к этой кривой. Площадь треугольника, образованного отрезками, отсекаемыми касательной на осях координат, и отрезком касательной между осями координат, равна

A $\quad 81/8$

B $\quad 64/3$

C $\quad 63/4$

D $\quad 39/4$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

20. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, 1]$ и принимает значения в отрезке $[0, 1]$. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ задана рекуррентно: $x_1 \in [0, 1]$, $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 2$, 3, ... Тогда

A если функция $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$, то для любого $x_1 \in [0,1]$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

B если функция $f(x)$ не убывает, то для любого $x_1 \in [0,1]$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

C если функция $f(x)$ разрывна на $[0,1]$, то существует такое число $x_1 \in [0,1]$, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует

D если предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует и равен c, то $f(c) = c$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Пусть A и B — две матрицы размера $m \times n$, где $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$. Обозначим через $\operatorname{tr} X$ след (сумму диагональных элементов) квадратной матрицы X, также обозначим через X^{T} матрицу, транспонированную к X. Какие из следующих утверждений (I, II, III) являются истинными?

I. Если $A \neq 0$, то $\operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}A) > 0$.

II. $\operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}B) \leqslant \dfrac{\operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}A) + \operatorname{tr}(B^{\mathsf{T}}B)}{2}$.

III. $(\operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}B))^2 \leqslant \operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}A)\operatorname{tr}(B^{\mathsf{T}}B)$.

A ни одно из I, I, III

B только I

C только I и II

D только I и III

E I, II и III

22. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Обозначим через $p_X(\lambda) = \det(X - \lambda I)$ характеристический многочлен матрицы X. Тогда

A $p_{A^2}(\lambda) = p_A(\lambda)$

B $p_{A^2}(\lambda^2) = (p_A(-\lambda))^2$

C $p_{A^2}(\lambda^2) = (p_A(\lambda))^2$

D $p_{A^2}(\lambda^2) = p_A(\lambda) \cdot p_A(-\lambda)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, которые трактуются как линейные операторы в $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $\operatorname{Im} X$ и $\operatorname{Ker} X$ образ и ядро матрицы X соответственно. Тогда

A если $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} B$, то $\operatorname{Im}(AB) \subset \operatorname{Ker}(AB)$

B если $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} A$, то $\operatorname{Im}(AB) \subset \operatorname{Ker}(AB)$

C если $\operatorname{Im}(AB) \subset \operatorname{Ker}(AB)$, то $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} B$

D если $\operatorname{Im}(AB) \subset \operatorname{Ker}(AB)$, то $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} A$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — две системы векторов в $\mathbf{R}^N$, где $N \geqslant 2$. Обозначим через $L(X)$ и $L(Y)$ их линейные оболочки. Тогда

A если $L(X) \subset L(Y)$ и система X линейно зависимая, то $m \leqslant n$

B если $L(X) \subset L(Y)$ и система X линейно независимая, то $m \leqslant n$

C если $L(X) \subset L(Y)$ и система Y линейно зависимая, то $m \leqslant n$

D если $L(X) \subset L(Y)$ и система Y линейно независимая, то $m \leqslant n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = y + \sin x$, $y(0) = 0$. Тогда $y(x)$

A не определена при $x = \pi$

B определена при $x = 1\pi$, но не определена при $x = 2\pi$

C определена при $x = 2\pi$, но не определена при $x = 4\pi$

D определена при $x = 4\pi$, но не определена при $x = 8\pi$

E определена при $x = 8\pi$

26. Интеграл $\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)^2 dx$ равен

A $1/60$

B $1/30$

C $1/3$

D $11/12$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

27. Функция $f(x)$ определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой. Тогда

A функция $\ln f(x)$ также определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой

B функция $\arcsin f(x)$ также определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой

C функция $f^2(x) - 2f(x) + 3$ также определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой

D функция $\operatorname{tg} f(x)$ также определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

28. Функция $f(x, y) = x^2 - y^2$ на множестве $\{(x, y)\colon x^2 + 2y^2 = 1\}$

A достигает наибольшего значения ровно в двух точках и достигает наименьшего значения ровно в двух точках

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках, но не достигает наименьшего значения

C достигает наименьшего значения ровно в двух точках, но не достигает наибольшего значения

D не достигает ни наименьшего, ни наибольшего значений

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

29. Функция $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

A достигает глобального максимума в точке $x = 0$

B имеет точку перегиба в точке $x = 0$

C достигает локального минимума в точке $x = 1$

D не достигает глобального минимума

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Непустые множества $A, B \subset \mathbf{R}$ таковы, что замыкание множества A равно замыканию множества B. Тогда

A если x — внутренняя точка для A, то x — внутренняя точка для B

B если x — внешняя точка для A, то x — внешняя точка для B

C если x — граничная точка для A, то x — граничная точка для B

D если $x \in A$ — предельная точка для A, то $x \in B$ и x — предельная точка для B

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. Пусть при $n \in \mathbf{N}$

$$f_n(x) = \frac{nx}{n + x^2}$$

и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (для тех значений $x \in \mathbf{R}$, при которых этот предел существует). Тогда при $n \to \infty$ функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$

A равномерно на $\mathbf{R}$

B равномерно на $(-\infty, -1]$

C равномерно на $[1, +\infty)$

D равномерно на $[-1, 1]$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Функция $f(x)$ задана и непрерывна на множестве $M \subset \mathbf{R}$. Тогда

A если $M = [0, +\infty)$ и функция $f(x)$ равномерно непрерывна на M, то $f(x)$ ограничена на M

B если $M = (0, 1)$ и функция $f(x)$ дифференцируема на M, то $f(x)$ равномерно непрерывна на M

C если $M = (0, 1)$, функция $f(x)$ дифференцируема на M и производная $f'(x)$ не ограничена на M, то $f(x)$ не является равномерно непрерывной функцией на M

D если $M = [0, +\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19.1.2 Вторая часть теста

1. Пусть A — ортогональная матрица порядка $2n$, где $n \geqslant 2$. Обозначим через a_1, a_2, ..., a_{2n} столбцы матрицы A. Матрицы P и Q определяются следующим образом:

$$P = \sum_{i=1}^{n} a_i a_i^T, \quad Q = \sum_{i=n+1}^{2n} a_i a_i^T,$$

где через a_i^T обозначена строка, транспонированная к столбцу a_i. Тогда

а) матрица P задает ортопроектор;

Да Нет

б) матрица Q ортогональная;

Да Нет

в) матрица $P - Q$ ортогональная;

Да Нет

г) $P + Q = I$;

Да Нет

д) $QP = P$;

Да Нет

е) $A^T PA$ является диагональной матрицей;

Да Нет

ж) AQA^T является диагональной матрицей;

Да Нет

з) $APA^T + AQA^T$ является диагональной матрицей.

Да Нет

2. Дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2x^2 - x^4} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right).$$

Обозначим через M множество тех x, для которых ряд сходится, и для $x \in M$ обозначим сумму этого ряда через $f(x)$. Тогда

а) множество M ограничено сверху;

Да Нет

б) множество M открыто;

Да Нет

в) граница множества M пуста;

Да Нет

г) уравнение $f(x) = 0$ имеет чётное число решений;

Да Нет

д) функция $f(x)$ является чётной;

Да Нет

е) интервал $(-3, -2)$ содержится в M, и на интервале $(-3, -2)$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

ж) интервал $(0, 1)$ содержится в M, и на интервале $(0, 1)$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

з) функция $f(x)$ ограничена на M.

Да Нет

3. Пусть $y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = y^2 - y$, $y(0) = a$, где a — вещественный параметр. Тогда

а) при любом a область определения функции $y(x)$ является неограниченным множеством;

Да Нет

б) при любом a функция $y(x)$ строго монотонна;

Да Нет

в) при любом a график функции $y(x)$ имеет вертикальную асимптоту;

Да Нет

г) при любом a функция $y(x)$ является не периодической функцией;

Да Нет

д) если $0 < a < 1$, то областью определения функции $y(x)$ является вся числовая прямая;

Да Нет

е) $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = 1$ при любом $a \neq 0$;

Да Нет

ж) если $a = 3$, то $y(3) = \dfrac{3}{3 - 2e^3}$;

Да Нет

з) при любом a уравнение $y(x) = 1$ имеет не более одного решения.

Да Нет

4. Дана функция $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$ и множество $M = \{(x, y) \colon y^2 + x^3 = 2\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

в) число локальных максимумов функции $f(x, y)$ на множестве M нечетное;

Да Нет

г) число локальных минимумов функции $f(x, y)$ на множестве M нечетное;

Да Нет

д) точка $(0, \sqrt{2})$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

е) точка $(\sqrt[3]{2}, 0)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

ж) точка $(1, -1)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) точка $(1, 1)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

Да Нет

19.2 Ответы и решения теста

19.2.1 Ответы на вопросы первой части

1. A. **2.** A. **3.** B. **4.** D. **5.** D. **6.** E. **7.** D. **8.** E. **9.** C. **10.** D. **11.** C. **12.** C. **13.** E. **14.** C. **15.** B. **16.** B. **17.** C. **18.** C. **19.** A. **20.** B. **21.** E. **22.** D. **23.** A. **24.** B. **25.** E. **26.** B. **27.** C. **28.** A. **29.** E. **30.** B. **31.** D. **32.** D.

19.2.2 Решения задач второй части

Задача 1. Заметим, что матрицы P и Q можно представить в виде матричных произведений следующим образом:

$$P = A\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}A^T, \quad Q = A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}A^T,$$

где 0 и I обозначают нулевую и единичную матрицы порядка n соответственно. Отсюда немедленно следует, что P и Q симметричные, и что

$$P^2 = \left(A\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}A^T\right)^2 = A\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 A^T = A\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}A^T = P$$

($A^TA = I$ в силу ортогональности матрицы A), т. е. P задает ортопроектор (ответ на вопрос а) да).

Матрица Q вырожденная, поэтому ортогональной не является (ответ на вопрос б) нет).

Рассмотрим матрицу $P - Q$. Так как она симметричная, то

$$(P-Q)^T(P-Q) = (P-Q)^2 = \left(A\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right)A^T\right)^2 =$$

$$= A\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right)^2 A^T = A\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}A^T = I,$$

т. е. ответ на вопрос в) да.

Сумма матриц $P + Q$ равна

$$P + Q = A\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right)A^T = A\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}A^T = I,$$

т. е. ответ на вопрос г) да.

Далее, $QP = (I - P)P = P - P^2 = P - P = 0$, т. е. ответ на вопрос д) нет.

Так как $A^TA = I$, то $A^TPA = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и ответ на вопрос е) да. В то же время

$$AQA^T = A^2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}(A^2)^T,$$

что может и не быть диагональной матрицей. В качестве примера можно рассмотреть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

для которой

$$AQA^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -\sqrt{3}/4 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

соответственно, ответ на вопрос ж) нет. И наконец, так как $P + Q = I$, то $APA^T + AQA^T = A(P+Q)A^T = AIA^T = I$, то ответ на вопрос з) да.

Задача 2. Очевидно, что $0 \in M$ и $f(0) = 0$. Пусть $x \neq 0$. Известно, что

$$1 - \cos\frac{x}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x}{n}\right)^2\right) \text{ при } n \to \infty.$$

Из интегрального признака Коши следует, что если $2x^2 - x^4 < 1$, то ряд сходится, если $2x^2 - x^4 \geqslant 1$, то ряд расходится. Элементарный анализ показывает, что $2x^2 - x^4 < 1$ при $x^2 \neq 1$ и $2x^2 - x^4 \geqslant 1$ при $x^2 = 1$. Следовательно, $M = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, Поэтому ответы на вопросы а) нет, б) да, в) нет.

При любом $x \in M$ каждое слагаемое ряда — неотрицательное число. Если $x \neq 0$, найдётся такое n, что $0 < |x|/n < 2\pi$, и, значит, среди членов ряда будет положительное слагаемое. Поэтому уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение $x = 0$. Ответ на вопрос г) нет. Каждое слагаемое ряда является чётной функцией, следовательно, $f(x)$ — чётная функция. Ответ на вопрос д) да. В силу а) $(-3, -2) \subset M$. Функция $g(x) = 2x^2 - x^4$ на интервале $(-3, -2)$ возрастает, поэтому $n^{2x^2-x^4} < n^{-8}$ при $x \in (-3, -2)$. Значит,

$$\left|n^{2x^2-x^4}\left(1 - \cos\frac{x}{n}\right)\right| < \frac{2}{n^8} \text{ при } x \in (-3, -2),$$

и по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно на интервале $(-3, -2)$. Ответ на вопрос е) да.

На интервале $(0, 1)$ функция $g(x) = 2x^2 - x^4$ является возрастающей, а функция $\cos(x/n)$ является убывающей при любом n. Значит, каждое слагаемое ряда является возрастающей функцией на $(0, 1)$, поэтому существует конечный или равный $+\infty$ предел $A = \lim\limits_{x\to 1-} f(x)$. Пусть $f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} n^{2x^2-x^4}(1 - \cos(x/n))$. Так как слагаемые ряда неотрицательны, то $f_N(x) \leqslant f(x)$. Переходя к пределу при $x \to 1-$, получаем: $\sum_{n=1}^{N} n\,(1 - \cos(1/n)) \leqslant A$. Поскольку $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1 - \cos\alpha}{\alpha^2} = 1/2$, то при n, больших некоторого N_0 выполняется неравенство $1 - \cos(1/n) \geqslant 1/(4n^2)$, и

$$\sum_{n=1}^{N} n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) \geqslant \sum_{n=1}^{N_0} n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4}\sum_{n=N_0+1}^{N}\frac{1}{n}.$$

Поскольку гармонический ряд расходится, то отсюда следует, что конечного предела $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$ не существует, т.е. в окрестности $x = 1$ функция $f(x)$ является неограниченной. Как следствие, сходимость на интервале $(0, 1)$ неравномерная. Ответы на вопросы ж) нет, з) нет.

Задача 3. Если $a = 0$, то почти очевидно, что $y(x) = 0$. Если $a = 1$, то решение $y(x) = 1$. Пусть $a \neq 0$, $a \neq 1$. Тогда в окрестности точки $x = 0$ выполнены неравенства $y(x) \neq 0$, $y(x) \neq 1$ в силу непрерывности решения $y(x)$, и можно «разделить переменные». Имеем:

$$\frac{dy}{y^2 - y} = dx, \quad \frac{dy}{y - 1} - \frac{dy}{y} = dx, \quad \ln\left|\frac{y - 1}{y}\right| = x + C, \quad \left|\frac{y - 1}{y}\right| = e^{x+C}.$$

Если $a > 1$, то $\dfrac{a - 1}{a} = e^C$, $\left|\dfrac{y - 1}{y}\right| = \dfrac{y - 1}{y}$ и $y(x) = \dfrac{a}{a - (a - 1)e^x}$. Область определения этой функции — полубесконечный интервал $\left(-\infty, \ln\dfrac{a}{a - 1}\right)$.

Если $0 < a < 1$, то $\dfrac{1 - a}{a} = e^C$, $\left|\dfrac{y - 1}{y}\right| = \dfrac{1 - y}{y}$ и вновь $y(x) = \dfrac{a}{a - (a - 1)e^x}$. Область определения этой функции — вся числовая прямая.

Аналогично при $a < 0$ получаем такое же выражение: $y(x) = \dfrac{a}{a - (a - 1)e^x}$. Область определения этой функции — полубесконечный интервал $\left(\ln\dfrac{a}{a - 1}, +\infty\right)$.

Поэтому ответ на вопрос а) да. Ответ на вопрос б) нет, так как при $a = 0$ решение — это константа. Ответ на вопрос в) нет, а на вопрос д) да, так как при $0 < a < 1$

решение задано на всей числовой прямой. Ответ на вопрос г) нет, так как константа является периодической функцией. Ответ на вопрос е) нет, так как при $a < 0$ решение не определено в окрестности $-\infty$.

При $a = 3$ решение $y(x)$ не определено при $x \geqslant \ln(3/2)$, а поскольку $\ln(3/2) < 3$, то ответ на вопрос ж) нет.

При $a = 1$ уравнение $y(x) = 1$ имеет бесконечно много решений. Поэтому ответ на вопрос з) нет.

Задача 4. Заметим, что выразив $y^2 = 2 - x^3$ из соотношения, задающего множество M, и подставив его в функцию $f(x, y)$ мы получим функцию $g(x) = 3x^2 + 2(2 - x^3) = 4 + x^2 - 2x^3$, которую можно исследовать как функцию одной переменной. Так как $y^2 \geqslant 0$, то исследовать функцию $g(x)$ следует на множестве, где $2 - x^3 \geqslant 0$ или на полуинтервале $\left(-\infty, \sqrt[3]{2}\right]$. Как видим, при $x \to -\infty$ функция $g(x) \to +\infty$, поэтому у функции $g(x)$ на $\left(-\infty, \sqrt[3]{2}\right]$ (а значит и у $f(x, y)$ на множестве M) не достигается наибольшее значение, но достигается наименьшее значение (ответы на вопросы а) нет, б) да).

Рассмотрим условие первого порядка $g'(x) = 6x - 6x^2 = 0$, откуда получим два значения $x = 0$ и $x = 1$. Вторая производная $g''(x) = 6 - 12x$ в точке $x = 0$ положительная (локальный минимум), а в точке $x = 1$ отрицательная (локальный максимум). Значению $x = 0$ соответствуют две точки $x = 0$, $y = \pm\sqrt{2}$, они обе являются точками локального минимума (ответ на вопрос д) да), значению $x = 1$ также соответствуют две точки $x = 1$, $y = \pm 1$, они обе являются точками локального максимума (ответ на вопрос ж) нет, на вопрос з) да). Теперь исследуем поведение функции $g(x)$ на границе полуинтервала $\left(-\infty, \sqrt[3]{2}\right]$. Производная $g'\left(\sqrt[3]{2}\right) = 6\sqrt[3]{2}\left(1 - \sqrt[3]{2}\right) < 0$, а значит точка $x = \sqrt[3]{2}$ является точкой локального минимума (ответ на вопрос е) нет). Этой точке соответствует единственная точка $x = \sqrt[3]{2}$, $y = 0$. Таким образом, число локальных максимумов $f(x, y)$ на M равно два (ответ на вопрос в) нет), число локальных минимумов $f(x, y)$ на M равно три (ответ на вопрос г) да).

20 Вступительный экзамен 2019 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 3 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

20.1 Тест

20.1.1 Первая часть теста

1. Число $\arcsin(\sin 10)$ равно

A	$10 - 2\pi$
B	$3\pi - 10$
C	$10 - 4\pi$
D	$4\pi - 10$
E	числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

2. Кривая на плоскости $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ определяется уравнением $x^2y + 2x - y^2 = 0$. Тогда

A касательная к этой кривой горизонтальна в точке $(x, y) = (-1, 1)$

B касательная к этой кривой горизонтальна в точке $(x, y) = (1, -1)$

C касательная к этой кривой вертикальна в точке $(x, y) = (1, -1)$

D касательная к этой кривой вертикальна в точке $(x, y) = (-1, 1)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Функции $f(x)$ и $g(x)$ отображают отрезок $[0, 1]$ в себя, причем функция $f(g(x))$ непрерывна на $[0, 1]$. Тогда

A функция $g(f(x))$ непрерывна на $[0, 1]$

B если функция $f(g(x))$ строго возрастает, то и функция $g(f(x))$ строго возрастает

C если функция $g(x)$ непрерывна в каждой точке $[0, 1]$, то и функция $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$

D функция $g(f(x))$ достигает наибольшего и наименьшего значения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3)} - x\right)$ равен

A $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$

B $\dfrac{a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1}{3}$

C 0

D 3

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, либо не существует

5. Функция $z(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ на множестве $\{(x, y)\colon x - y = \pi/4\}$

A достигает наибольшего значения, равного $1 + 1/\sqrt{2}$

B достигает наименьшего значения, равного $1 - \sqrt{3}/2$

C не достигает наибольшего значения

D не достигает наименьшего значения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Функция $y(x)$ задана как неявная функция равенством $y^2+2xy-x^2 = 2y$ в окрестности точки (x_0, y_0). Тогда

A если $(x_0, y_0) = (0, 0)$, то точка $x = 0$ является точкой локального минимума функции $y(x)$

B если $(x_0, y_0) = (1, 1)$, то точка $x = 1$ является точкой локального максимума функции $y(x)$

C если $(x_0, y_0) = (0, 0)$, то точка $x = 0$ не является точкой локального экстремума функции $y(x)$

D если $(x_0, y_0) = (1, 1)$, то точка $x = 1$ не является точкой локального экстремума функции $y(x)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Пусть $y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = y - e^x$$

с начальным условием $y(0) = 1$. Тогда $y(1)$ равно

A 0

B 1

C e

D $-1/e$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не определено

8. Пусть

$$f(x) = \int_{-x}^{x} e^{-(x^2+t^2)/2} dt$$

и $f'(x)$ — производная функции $f(x)$. Тогда значение производной $f'(0)$ равно

A 0

B -1

C 1

D 2

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не определено

9. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x \ln(x + e^x) - x^2\right)$ равен

A 0

B $1/e$

C $1/2$

D $\ln 2$

E числу, отличному от A, B, C, D, или не существует

10. Выберите истинное утверждение (все множества суть подмножества числовой прямой):

A любое множество имеет точную верхнюю грань, причем единственную

B пересечение конечного количества множеств, каждое из которых является либо открытым, либо замкнутым, также является либо открытым, либо замкнутым

C объединение конечного количества множеств, каждое из которых является либо открытым, либо замкнутым, также является либо открытым, либо замкнутым

D объединение непустых непересекающихся множеств не может быть компактным

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Пусть $f_n(x) = (x+2)\operatorname{arctg}(x^n)$. Обозначим через M множество тех x, для которых последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится, и для $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда

A множество M открыто

B функция $f(x)$ является строго возрастающей

C уравнение $f(x) = c$ не имеет решений при $0 < c < 3$

D график функции $y = f(x)$ имеет асимптоту

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Последовательность вещественных чисел $x_1, x_2, \dots$ такова, что при всех $n = 1, 2, \dots$ выполняются неравенства $x_{n+1} \neq x_n$ и

$$\frac{|x_{n+2} - x_{n+1}|}{|x_{n+1} - x_n|} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Найдите *ложное* утверждение:

A последовательность $\{x_n\}$ сходится

B ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится

C последовательность $\{|x_{n+1} - x_n|\}$ сходится

D ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|$ сходится

E	среди утверждений A, B, C, D есть ложное

13. Задана функция $f(x, y) = x - y$ и множество $M = \{(x, y)\colon 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 1\}$. Выберите *ложное* утверждение

A	функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наибольшего и наименьшего значения

B	наименьшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M равно $-1/\sqrt{7}$

C	точка $(x, y) = \left(1/\sqrt{7}, -1/\sqrt{7}\right)$ является точкой глобального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M

D	точка $(x, y) = (1, 1)$ не является точкой глобального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M

E	среди утверждений A, B, C, D есть ложное

14. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = y^3$, $y(0) = 1$. Тогда значение $y(3/8)$ равно

A	$1/2$

B	$1/4$

C	$\operatorname{arctg} \sqrt{\pi}$

D	2

E	другому числу или не существует

15. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \dfrac{y}{x^2 + 1}$, $y(1) = -1$ на своей области определения

A	не имеет нулей

B	имеет ровно один ноль

C	имеет ровно два нуля

D	имеет ровно три нуля

E	имеет более трех нулей

16. Пусть $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$, $\{y_n, n = 1, 2, \dots\}$ — последовательности с положительными членами, первая последовательность сходится, вторая — расходится. Тогда

A	последовательность $\{x_{n+1}/x_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится

B	последовательность $\{\sqrt[n]{x_n}, n = 1, 2, \dots\}$ сходится

C последовательность $\{x_n \cdot y_n, n = 1, 2, \dots\}$ расходится

D последовательность $\{y_n^{x_n}, n = 1, 2, \dots\}$ расходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Пусть A и B — подмножества числовой прямой $\mathbf{R}$, множество A открыто, множество B замкнуто. Тогда

A множество $A \cap B$ не является открытым

B множество $A \cup B$ замкнуто

C множество $A \setminus B$ открыто

D множество $B \setminus A$ не является замкнутым

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

18. Пусть M — подмножество числовой прямой $\mathbf{R}$. Тогда

A если множество M ограничено и каждая его точка является граничной, то оно содержит изолированные точки

B если множество M ограничено и каждая его точка является предельной, то оно замкнуто

C если множество M не ограничено и имеет предельные точки, то оно замкнуто

D если множество M бесконечно, ограничено и не имеет предельных точек, то оно открыто

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Задана функция $f(x, y) = e^{x+y}$ и множество $M = \{(x, y) \colon x + y^2 = 0\}$. Тогда

A функция $f(x, y)$ не ограничена на множестве M

B функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наименьшего значения

C для любой точки $(x, y) \in M$ выполнено неравенство $f(x, y) \leqslant 7/5$

D точка $(0, 0)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6xy - 14x - 10y + 10$ равно

A -6

B -17

C -20

D -23

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

21. Задан функциональный ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n.$$
Пусть M — множество точек на числовой прямой, в которых ряд сходится. Для $x \in M$ обозначим через $S(x)$ сумму этого ряда. Тогда

A множество M ограничено

B множество M открыто

C $S(x) > 0$ для любого $x \in M$

D на отрезке $[0, 1]$ ряд сходится равномерно

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Задана функция
$$f(x) = \int_{x+1}^{x^2} e^{-t^2} dt, \ x \in \mathbf{R}.$$
Тогда

A функция $f(x)$ достигает на $\mathbf{R}$ наибольшего значения

B функция $f(x)$ достигает на $\mathbf{R}$ наименьшего значения

C $f(x) > 0$ при любом $x \in \mathbf{R}$

D при любом c уравнение $f(x) = c$ имеет не более одного решения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Пусть $x_1 > 0$ и $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{1}{x_n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

A если $x_1 < 1/2$, то последовательность $\{x_n\}$ расходится

B если $x_1 > 10$, то последовательность $\{x_n\}$ возрастающая

C существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n\}$ неограниченная

D существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n\}$ сходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24. Пусть $x_n = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ равен

A 0

B $1/e$

C $1/e^2$

D $1/e^4$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

25. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — системы векторов из $\mathbf{R}^N$, где $N \geqslant 2$, $m, n \geqslant 1$. Известно, что система X линейно зависимая. Тогда

A если каждый вектор системы X линейно выражается через векторы системы Y и $n \leqslant m$, то система Y линейно зависимая

B если каждый вектор системы X линейно выражается через векторы системы Y и $n \geqslant m$, то система Y линейно зависимая

C если каждый вектор системы Y линейно выражается через векторы системы X и $n \leqslant m$, то система Y линейно зависимая

D если каждый вектор системы Y линейно выражается через векторы системы X и $n \geqslant m$, то система Y линейно зависимая

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

26. Квадратная матрица A порядка $n \geqslant 3$ трактуется как линейный оператор в $\mathbf{R}^n$. Тогда

A если A задает оператор проектирования, то у A бесконечно много инвариантных подпространств

B если A диагонализируемая, то у A бесконечно много инвариантных подпространств

C если A не диагонализируемая, то у A бесконечно много инвариантных подпространств

D если A ортогональная, то у A бесконечно много инвариантных подпространств

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

27. Задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где α — вещественный параметр. Тогда

A если A положительно определена, то A отрицательно определена

B если A отрицательно определена, то A положительно определена

C если $\alpha > 0$, то A положительно определена

D если $\alpha < 0$, то A отрицательно определена

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

28. Заданы матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$ и столбец $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, где α — вещественный параметр. Найдите *ложное* утверждение

A при всех α система $Ax = b$ имеет решение

B существует α, при котором система $Ax = b$ имеет единственное решение

C существует α, при котором множество решений системы $Ax = b$ одномерное

D существует α, при котором множество решений системы $Ax = b$ двумерное

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

29. Пусть L_1 и L_2 — подпространства в $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, такие что $L_1 \subset L_2$. Матрицы P и Q задают операторы ортогонального проектирования на L_1 и L_2 соответственно. Найдите *ложное* утверждение

A QP задает оператор ортогонального проектирования

B PQ задает оператор ортогонального проектирования

C $Q - P$ задает оператор ортогонального проектирования

D $P - Q$ задает оператор ортогонального проектирования

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

30. Неопределенный интеграл $\int \cos^3 x \, dx$ равен

A $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$

B $\frac{1}{4}\sin^4 x$

C $\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$

D $\frac{1}{4}\cos^4 x$

E $\frac{\cos^4 x}{4\sin x}$

31. Неопределенный интеграл $\int x \sin x \, dx$ равен

A $\quad \frac{1}{2}x^2 \sin x + C$

B $\quad -x \cos x + C$

C $\quad \frac{1}{2}x^2 \cos x + C$

D $\quad (1 - x) \cos x + C$

E $\quad \sin x - x \cos x + C$

32. Определенный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x}$ равен

A $\quad \ln \frac{e}{1+e}$

B $\quad \ln \frac{2e}{1+e}$

C $\quad \ln \frac{2e}{e-1}$

D $\quad \ln \frac{1+e}{e}$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

20.1.2 Вторая часть теста

1. Задана функция $f(x, y) = 6x^2 + 12xy + y^2$ и множество $M = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 = 1\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наибольшего и наименьшего значений;

Да $\qquad$ Нет

б) точка $(1, 0)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да $\qquad$ Нет

в) число локальных минимумов функции $f(x, y)$ на множестве M чётное;

Да $\qquad$ Нет

г) точка $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да $\qquad$ Нет

д) в точке $\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M;

Да $\qquad$ Нет

е) точка $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

ж) существует такая точка $(x_1, y_1) \in M$, что $f(x_1, y_1) = 6$;

Да Нет

з) существует такая точка $(x_2, y_2) \in M$, что $f(x_2, y_2) = 2$.

Да Нет

2. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $\operatorname{Ker} A^{n-1} \neq \operatorname{Ker} A^n$, где через $\operatorname{Ker} X$ обозначается ядро матрицы X. Через $\operatorname{Im} X$ обозначим образ матрицы X. Тогда

а) матрица A невырожденная;

Да Нет

б) матрица A нильпотентная, т. е. $A^m = 0$ для некоторого m;

Да Нет

в) ранг матрицы A не больше чем $n-2$;

Да Нет

г) ранг матрицы A не меньше чем $n-1$;

Да Нет

д) $\operatorname{Ker} A^{m-1} \neq \operatorname{Ker} A^m$ при всех $1 < m \leqslant n$;

Да Нет

е) сумма $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A = \mathbf{R}^n$;

Да Нет

ж) если $A^{n-1}x \neq 0$, то векторы x, Ax, A^2x, ..., $A^{n-1}x$ образуют базис в $\mathbf{R}^n$;

Да Нет

з) матрица A имеет бесконечно много инвариантных подпространств.

Да Нет

3. Пусть

$$f_n(x) = \frac{\sin(n(x+n))}{n(1+x)^2}.$$

Обозначим через M множество точек $x \in \mathbf{R}$, для которых последовательность $f_n(x)$ сходится, и пусть

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \; x \in M.$$

Пусть $g_n(x) = f_n'(x)$. Тогда:

а) множество M замкнуто;

Да Нет

б) множество M открыто;

Да Нет

в) для любого n существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$;

Да Нет

г) существует точка $x \in M$, в которой функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода;

Да Нет

д) существует точка $x \in M$, в которой функция $f(x)$ дифференцируема;

Да Нет

е) последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на M;

Да Нет

ж) последовательность $g_n(x)$ сходится в каждой точке $x \in M$;

Да Нет

з) для любого n существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$.

Да Нет

4. Пусть $y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}\left(y - e^{-e^{-x}}\right)$$

с начальным условием $y(0) = a$, где $a \in \mathbf{R}$ — параметр. Пусть множество $M \subset \mathbf{R}$ — область определения функции $y(x)$, $\bar{y} = \sup\limits_{x\in M} y(x)$. Тогда

а) множество M ограничено;

Да Нет

б) функция $y(x)$ ограничена на M;

Да Нет

в) функция $y(x)$ немонотонна на M;

Да Нет

г) функция $y(x)$ равномерно непрерывна на M;

Да Нет

д) $\bar{y} = 1/e$ при $a = 1/e$;

Да Нет

е) $\bar{y} = e$ при $a = 3/e$;

Да Нет

ж) график функции $y(x)$ имеет не менее одной точки перегиба;

Да Нет

з) если $\bar{x}$ — точка локального максимума функции $y(x)$, то в точке $\bar{x}$ достигается наибольшее значение функции $y(x)$ при $x \in M$.

Да Нет

20.2 Ответы и решения теста

20.2.1 Ответы на вопросы первой части

1. B. **2.** B. **3.** E. **4.** A. **5.** A. **6.** E. **7.** A. **8.** D. **9.** A. **10.** E. **11.** D. **12.** B. **13.** B. **14.** D. **15.** A. **16.** E. **17.** C. **18.** D. **19.** C. **20.** E. **21.** D. **22.** B. **23.** D. **24.** A. **25.** D. **26.** A. **27.** B. **28.** B. **29.** D. **30.** A. **31.** E. **32.** B.

20.2.2 Решения задач второй части

Задача 1. Множество M является компактным, а функция $f(x, y)$ непрерывна на M, значит, в силу теоремы Вейерштрасса $f(x, y)$ достигает на M наибольшего и наименьшего значений. Каждая точка множества M является регулярной, следовательно, функция Лагранжа имеет следующий вид: $L(x, y, \lambda) = 6x^2 + 12xy + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Запишем условие первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 12x + 12y - 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 12x + 2y - 2\lambda y = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (6-\lambda)x + 6y = 0, \\ 6x + (1-\lambda)y = 0. \end{cases}$$

Получили линейную однородную систему относительно x, y, которая должна иметь ненулевое решение, поскольку функция $f(x, y)$ имеет на M точки максимума и минимума, и $(0, 0) \notin M$. Следовательно, определитель полученной системы равен нулю. Таким образом, $(6-\lambda)(1-\lambda) - 36 = 0$, значит, $\lambda = -3$ или $\lambda = 10$.

Пусть $\lambda = -3$. Тогда из первого уравнения системы следует, что $y = -\dfrac{3}{2}x$ и с учётом ограничения получаем две точки $A_1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}, -\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$, $A_2 = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$. Аналогично при $\lambda = 10$ получаем ещё две точки $A_3 = \left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $A_4 = -\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}, -\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$. Заметим, что $f(A_1) = f(A_2) = -\dfrac{39}{13}$, $f(A_3) = f(A_4) = \dfrac{142}{13}$. Поскольку других точек, удовлетворяющих необходимому условию экстремума нет, то A_1, A_2 — это точки наименьшего значения, а точки A_3, A_4 — это точки наибольшего значения функции $f(x, y)$ на множестве M. Других локальных экстремумов нет. Получаем следующие ответы: а) да, б) нет, в) да, г) нет, д) да, е) да, ж) да, з) да

Задача 2. Заметим, что если $\operatorname{Ker} A^{m-1} = \operatorname{Ker} A^m$ для некоторого $m \geqslant 1$, то $\operatorname{Ker} A^m = \operatorname{Ker} A^{m+1} = \ldots$. Действительно, если $\operatorname{Ker} A^{m-1} = \operatorname{Ker} A^m$, то $\operatorname{Im} A^{m-1} = \operatorname{Im} A^m$, и при любом ненулевом $x \in \operatorname{Im} A^{m-1} = \operatorname{Im} A^m$ образ $Ax \neq 0$, значит $\operatorname{Ker} A^{m+1} = \operatorname{Ker} A^m$. Отсюда следует, что $\operatorname{Ker} A \neq \operatorname{Ker} A^2 \neq \ldots \neq \operatorname{Ker} A^n$. Так как эта последовательность ядер вложенная, то $0 < \dim \operatorname{Ker} A < \dim \operatorname{Ker} A^2 < \ldots < \dim \operatorname{Ker} A^n \leqslant n$, откуда следует, что $\dim \operatorname{Ker} A = 1$, $\dim \operatorname{Ker} A^2 = 2$, ..., $\dim \operatorname{Ker} A^n = n$. Ответы на вопросы а) — «нет», б) — «да», в) — «нет», г) — «да», д) — «да».

Так как $\operatorname{Ker} A \neq \operatorname{Ker} A^2$, то $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A \neq \{0\}$, и поэтому $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A \neq \mathbf{R}^n$, ответ на вопрос е) — «нет».

Для того, чтобы убедиться, что векторы x, Ax, A^2x, ..., $A^{n-1}x$ образуют базис в $\mathbf{R}^n$, достаточно доказать, что они линейно независимые. Пусть линейная комбинация

$$\alpha_0 x + \alpha_1 Ax + \ldots + \alpha_{n-1}A^{n-1}x = 0.$$

Тогда $A^{n-1}(\alpha_0 x + \alpha_1 Ax + \ldots + \alpha_{n-1}A^{n-1}x) = \alpha_0 A^{n-1}x = 0$, откуда следует, что $\alpha_0 = 0$. Аналогично получаем, что α_1, ..., α_{n-1} все равны нулю. Ответ на вопрос ж) — «да».

Найдем теперь инвариантные подпространства матрицы A. Зафиксируем вектор x, для которого $A^{n-1}x \neq 0$. Пусть L — инвариантное подпространство. Каждый вектор из L можно разложить по базису x, Ax, A^2x, ..., $A^{n-1}x$. Обозначим через m наименьшее значение i, для которого в L существует вектор z, в разложении которого вектор $A^i x$ входит с ненулевым коэффициентом. Пусть $z = \alpha_m A^m x + \ldots + \alpha_{n-1}A^{n-1}x$, где $\alpha_m \neq 0$. Так как L инвариантно относительно A, то Az, A^2z, ..., $A^{n-m-1}z \in L$ (и все ненулевые). Легко видеть, что эти векторы линейно независимые и образуют базис в $L_m = \langle A^m x, \ldots, A^{n-1}x\rangle$, следовательно $L = L_m$, то есть любое инвариантное подпространство для A есть одно из L_m, и их число равно $n + 1$. Ответ на вопрос з) — «нет».

Задача 3. Функции $f_n(x)$ определены всюду на $\mathbf{R}$, кроме точки $x = -1$. При фиксированном x, если $x \neq -1$, числитель дроби — ограниченная функция, а знаменатель неограниченно растет с ростом n. Соответственно при любом $x \neq -1$ существует предел

$f(x) \equiv \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ и множество $M = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Ответ на вопрос а) «нет», ответ на вопрос б) «да».

Поскольку для любого $n = 1, 2, \ldots$ функции $f_n(x)$ являются частным, в котором числитель — ограниченная функция, а знаменатель стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$ то предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ существует и равен нулю. Соответственно на вопрос в) ответ «да».

Функция $f(x) \equiv 0$ на множестве M. Поэтому в любой точке множества M она дифференцируема (и не имеет разрыва). Ответы на вопросы г) — «нет» и д) — «да».

Поскольку на множестве M функции $f_n(x)$ не ограничены (в окрестности точки $x = -1$), а предельная функция $f(x)$ ограничена, то равномерной сходимости последовательности функций $f_n(x)$ на множестве M нет. Соответственно на вопрос е) ответ «нет».

Найдем явный вид функций $g_n(x)$, для чего продифференцируем $f_n(x)$:

$$g_n(x) = f_n'(x) = -\frac{2\sin(n(x+n))}{n(1+x)^3} + \frac{\cos(n(x+n))}{(1+x)^2}.$$

Числитель обоих слагаемых ограничен. При $x \to +\infty$ знаменатель обоих слагаемых стремится к $+\infty$. Поэтому ответ на вопрос з) — «да».

Первое слагаемое представляет собой дробь, в которой знаменатель неограниченно растет с увеличением n. Поэтому первое слагаемое при $n \to \infty$ стремится к нулю.

Во втором слагаемом зависимость от n имеется только под знаком косинуса, аргумент которого по модулю неограниченно возрастает с ростом n, и при этом всевозможные разности значений аргумента для разных пар номеров n_1, n_2 (за исключением, возможно, некоторых отдельно взятых пар номеров) не кратны числу 2π – периоду косинуса (т.е. не могут быть представлены в виде $2\pi k$, где k – какое-то целое число). Это означает, что второе слагаемое не имеет предела при $n \to \infty$.

Теперь дадим строгое доказательство этого факта.

Предположим, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n(x+n))$ существует при любом $x \in M$. Запишем следующее тригонометрическое тождество:

$$2\cos(n(1/2+n))\cos(n(-1/2+n)) = \cos(2n^2) + \cos(n) = 2\cos^2(n^2) - 1 + \cos(n),$$

из которого получим:

$$\cos(n) = 2\cos(n(1/2+n))\cos(n(-1/2+n)) + 1 - 2\cos^2(n(0+n)).$$

По предположению правая часть этого равенства имеет предел при $n \to \infty$ (рассматриваются $x = 0, \pm 1/2$). Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos(n) - \cos(n+2)) = 0$. Запишем эту разность как

$$\cos(n) - \cos(n+2) = 2\sin(n+1)\sin(1),$$

и так как $\sin(1) \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+1) = 0$. Далее,

$$\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1),$$

откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n)=0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству $\sin^2(n)+\cos^2(n)=1$. Следовательно, по крайней мере при одном из $x=0$, $x=1/2$, $x=-1/2$ искомого предела не существует. Ответ на вопрос ж) — «нет».

Задача 4. Данное уравнение является линейным, поэтому решение данной задачи Коши можно найти методом вариации постоянной. Общее решение однородного уравнения

$$y(x)=Ce^{-e^{-x}},\quad C\in\mathbf{R},$$

откуда получаем решение задачи Коши

$$y(x)=(e^{-x}+ae-1)e^{-e^{-x}},$$

определенное на всей вещественной прямой (ответ на вопрос а) — «нет»). При этом функция $e^{-e^{-x}}$ ограничена, так как ее значения лежат в интервале $(0,1)$, и функция $e^{-x}e^{-e^{-x}}=$ $=e^{-x-e^{-x}}$ тоже ограничена, так как показатель степени ограничен сверху (достигает наибольшего значения в точке $x=0$). Ответ на вопрос б) — «да».

Производная решения задачи Коши равна

$$y'(x)=(e^{-x}+ae-2)e^{-e^{-x}}e^{-x}.$$

Заметим, что так как $e^{-x}>0$, то при $a\geqslant 2/e$ производная всегда положительная (ответ на вопрос в) — «нет»). Также легко видеть, что производная ограничена на $\mathbf{R}$ (ответ на вопрос г) — «да»).

Функция $y(x)$ ни при каком $a\in\mathbf{R}$ не является постоянной, а любая непостоянная ограниченная на $\mathbf{R}$ функция имеет хотя бы одну точку перегиба (ответ на вопрос ж) — «да»).

Знак производной $y'(x)$ определяется знаком множителя $e^{-x}+ae-2$. И так как e^{-x} убывает на $\mathbf{R}$, то если $y'(\bar{x})=0$, то $y'(x)>0$ при $x<\bar{x}$ и $y'(x)<0$ при $x>\bar{x}$ (ответ на вопрос з) — «да»).

При $a=1/e$ производная $y'(x)=(e^{-x}-1)e^{-e^{-x}}e^{-x}$, соответственно, $y(x)$ достигает наибольшего значения при $x=0$. При этом $y(0)=(e^{-0}+1-1)e^{-e^{-0}}e^{-0}=1/e$ (ответ на вопрос д) — «да»).

При $a=3/e$ производная $y'(x)=(e^{-x}+1)e^{-e^{-x}}e^{-x}>0$, соответственно, $y(x)$ монотонно возрастает на $\mathbf{R}$. При этом $\bar{y}=\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(e^{-x}+2)e^{-e^{-x}}=2$ (ответ на вопрос е) — «нет»).

21 Вступительный экзамен 2020 г.

Экзамен по математике проводился в форме онлайнового теста. Продолжительность экзамена составляла 3 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

21.1 Тест

21.1.1 Первая часть теста

1. Функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ определены и непрерывны на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$. Тогда

A уравнение $f(x, y) = g(x, y)$ не может иметь ровно два решения

B если $f(0, 0) > g(0, 0)$, а $f(1, 1) < g(1, 1)$, то уравнение $f(x, y) = g(x, y)$ имеет бесконечно много решений

C если уравнение $f^2(x, y) = g^2(x, y)$ имеет решения, то и уравнение $f(x, y) = g(x, y)$ имеет решения

D если каждое из уравнений $f(x, y) = g(x, y)$ и $f(x, y) = -g(x, y)$ имеют нечетное количество решений, то уравнение $f^4(x, y) = g^4(x, y)$ имеет четное количество решений

E — все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Пусть $f(x,y) = x^2 + y^2$ и $M = \{(x,y)\colon 2|x| + |y| = 1\}$. Найдите *ложное* утверждение.

A — каждый локальный минимум функции $f(x,y)$ на множестве M является точкой наименьшего значения функции $f(x,y)$ на множестве M

B — каждый локальный максимум функции $f(x,y)$ на множестве M является точкой наибольшего значения функции $f(x,y)$ на множестве M

C — число локальных максимумов функции $f(x,y)$ на множестве M не меньше трёх

D — число локальных минимумов функции $f(x,y)$ на множестве M больше двух

E — среди утверждений A, B, C, D есть ложное

3. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$ равен

A — $e^{-\pi}$

B — $e^{-2/\pi}$

C — $e^{-\pi/2}$

D — e^2

E — числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

4. Предел $\lim\limits_{x\to0}(2-\cos^2 x)^{1/(x-\sin x)}$ равен

A — $1/e^3$

B — $1/e^6$

C — 0

D — 1

E — числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

5. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -7 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Тогда

A — у матрицы A ровно два разных собственных числа

B — число 0 — единственное собственное число матрицы A

C число 2 — единственное собственное число матрицы A

D число 3 — единственное собственное число матрицы A

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Дана числовая последовательность $a_n = 1/(2n + n^2)$. Предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{1} (\ln x)^2 \, dx$$

равен

A 0

B 1

C 2

D 3

E другому числу или не существует

7. Функция $y(x)$ задана как неявная функция в окрестности точки $(x, y) = (1, 1)$ при помощи уравнения $x^3 + y^2 - 3x + 3y - 2 = 0$. Тогда

A функция $y(x)$ при $x = 1$ строго возрастает

B функция $y(x)$ при $x = 1$ строго убывает

C функция $y(x)$ при $x = 1$ имеет локальный минимум

D функция $y(x)$ при $x = 1$ имеет локальный максимум

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = y \cdot \ln y$, $y(0) = e$. Тогда $y(x)$

A не определена при $x = 1$

B определена при $x = 1$, но не определена при $x = e$

C определена при $x = e$, но не определена при $x = e^2$

D определена при $x = e^2$, но не определена при $x = e^{e^2}$

E определена при $x = e^{e^2}$

9. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \dfrac{y}{x^2 - 4}$, $y(0) = 1$ на своей области определения

A не имеет нулей

B имеет ровно один ноль

C имеет ровно два нуля

D имеет ровно четыре нуля

E имеет более четырех нулей

10. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на всей числовой прямой, причем $g(x) < 0$ для $x < 0$ и $g(x) > 0$ для $x > 0$. Тогда

A если функция $f(x)$ является нечетной, то функция $h(x) = f(x)/g(x)$ является четной

B если функция $f(x)$ является четной, то функция $h(x) = f(x)/g(x)$ является нечетной

C функцию $h(x) = f(x)/g(x)$ можно так доопределить в точке $x = 0$, что она станет непрерывной на всей числовой прямой

D функцию $h(x) = f(x)/g(x)$ нельзя так доопределить в точке $x = 0$, что она станет непрерывной на всей числовой прямой

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема на всей вещественной прямой. Тогда

A если у графика функции $f(x)$ есть горизонтальная асимптота, то производная функции $f(x)$ нигде не равна нулю

B если у графика функции $f(x)$ есть две разные горизонтальные асимптоты, то у графика функции $f(x)$ есть точка перегиба

C если у графика функции $f(x)$ есть наклонная асимптота, то у графика функции $f^2(x)$ нет наклонной асимптоты

D если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, то и функция $f^2(x)$ достигает наибольшего значения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Функция $f(x, y) = xy$ на множестве $\{(x, y)\colon x^2 + 4y^2 - 2xy = 1\}$

A достигает наибольшего значения ровно в двух точках и достигает наименьшего значения ровно в двух точках

B достигает наибольшего значения ровно в четырех точках, но не достигает наименьшего значения

C достигает наименьшего значения ровно в четырех точках, но не достигает наибольшего значения

D не достигает ни наименьшего, ни наибольшего значений

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbf{R}$ и $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$. Тогда существует точка $x \in \mathbf{R}$ такая, что

A $f'(x) \geqslant 0$

B $f'(x) \leqslant 0$

C $f''(x) \geqslant 0$

D $f''(x) \leqslant 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Пусть $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$, $f'_n(x)$ — производная $f_n(x)$. Тогда

A последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно на $\mathbf{R}$

B последовательность $f'_n(x)$ сходится равномерно на $\mathbf{R}$

C последовательность $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$ сходится равномерно на $\mathbf{R}$

D ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на $\mathbf{R}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. Интеграл $\displaystyle\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}dx$ равен

A 2

B $\dfrac{4}{e}$

C $2 - \dfrac{2}{e}$

D $2 - \dfrac{4}{e}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

16. Предел $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1/n}{n+1/n}\right)^n$ равен

A 1

B $1/e$

C $1/e^2$

D 0

E величине, отличной от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

17. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится. Тогда

A ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится

B ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ сходится

C ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n^3$ сходится

D ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n^2}$ сходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

18. Функция $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + 2xy$

A имеет два локальных минимума

B имеет два локальных максимума

C имеет один локальный минимум и один локальный максимум

D не имеет локальных экстремумов

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Дана последовательность функций $f_n(x) = n^2\left(1 - \cos\left(\dfrac{x^2-1}{nx}\right)\right)$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $M \subset \mathbf{R}$ — множество таких чисел x, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Для каждого $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда

A множество M замкнуто

B функция $f(x)$ нечетная

C уравнение $f(x) = -1$ имеет единственное решение

D функция $f(x)$ имеет две точки локального минимума

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Функция $f(x)$ задана и непрерывна на $[0, +\infty)$, а также дифференцируема на $(0, +\infty)$. Тогда

A если функция $f(x)$ ограниченная, то множество ее значений замкнутое

B если $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, то функция $f(x)$ ограниченная

C если существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$

D если не существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$, то график функция $f(x)$ не имеет ни наклонной, ни горизонтальной асимптоты

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Кривая на плоскости xOy задана уравнением $x^3 + 3xy + y^2 = 1$. Через точку $(1, 0)$ проведена касательная к этой кривой. Площадь треугольника, образованного отрезками, отсекаемыми касательной на осях координат, и отрезком касательной, заключенным между осями координат, равна

A 1

B 1/2

C 2

D 3/2

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

22. Пусть $M \subset \mathbf{R}$. Обозначим через $\partial(M)$ множество граничных точек множества M, через $l(M)$ — множество его предельных точек. Тогда

A если $l(M) \subset \partial(M)$, то множество M замкнутое

B если $\partial(M) \subset l(M)$, то множество M не является открытым

C если $\partial(M) = M$, то множество M конечно

D $M \cup \partial(M) = M \cup l(M)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x^2 + x - 1)^n}{n}$. Обозначим через M множество тех x, для которых ряд сходится (множество сходимости). Тогда

A множество M замкнуто

B множество M открыто

C если $a \in M$, $b \in M$, $a < b$, то $[a, b] \subset M$

D $[1/2, 3/4] \in M$, и на этом отрезке ряд сходится равномерно

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24. Интеграл $\int_1^5 \frac{dx}{x^2 - 13x + 30}$ равен

A $\ln 45/7$

B $(\ln 45 - 2\ln 2)/7$

C 0

D $\ln 180/7$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

25. Уравнение $\ln x = cx^2$ ($c > 0$ – параметр) имеет единственный корень. Тогда параметр c равен:

A e

B $e/2$

C $1/e$

D $\frac{1}{2e}$

E другому числу либо такого значения параметра не существует

26. Пусть $f(x)$ дифференцируема на всей вещественной прямой и строго возрастает. Тогда предел

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^{1/3} - 2^{1/3}}$$

равен

A $3 \cdot 2^{2/3} f'(2)$

B $\frac{2^{3/2}}{3} f'(2)$

C $2 \cdot 3^{2/3} f'(2)$

D $\frac{3^{3/2}}{2} f'(2)$

E другому числу или не существует

27. Функция $f(x)$ определена на всей вещественной оси и удовлетворяет условиям:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y+1), \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Тогда величина $f'(2)$ равна

A 3

B 5

C 7

D 9

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

28. Интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$ равен

A 0

B $\dfrac{\ln 2}{2}$

C $\ln 2$

D $2\ln 2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

29. Предел $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\int_0^1 (1+x)^t\,dx\right)^{1/t}$ равен

A e

B $2/e$

C $3e$

D $4/e$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

30. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ — система векторов в $\mathbf{R}^n$, где $m, n \geqslant 2$. Обозначим через $\langle X\rangle$ линейную оболочку системы X и через $\dim\langle X\rangle$ — её размерность. Тогда

A если для любого $y \in \mathbf{R}^n$ система $\{x_1, \ldots, x_m, y\}$ линейно зависима, то $m = n$

B если для любого $y \in \mathbf{R}^n$ система $\{x_1, \ldots, x_m, y\}$ линейно зависима, то $\dim\langle X\rangle = m$

C если $\dim\langle X\rangle = n$, то для любого $y \in \mathbf{R}^n$ система $\{x_1, \ldots, x_m, y\}$ линейно зависима

D если существует $y \in \mathbf{R}^n$, для которого система $\{x_1, \ldots, x_m, y\}$ линейно независимая, то $m \geqslant n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. Пусть L_1, L_2, L_3 — подпространства в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 2$, размерностей n_1, n_2, n_3 соответственно. Тогда

A если $L_1 + L_2 + L_3 = \mathbf{R}^n$ и $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{0\}$, то $n_1 + n_2 + n_3 = n$

B если $L_1 + L_2 = \mathbf{R}^n$, то $n_1 + n_2 + n_3 > n$

C　если $n_1 + n_2 + n_3 \geqslant n$, то $L_1 + L_2 + L_3 = \mathbf{R}^n$

D　если $n_1 + n_2 = n$ и $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, то $L_1 + L_2 + L_3 = \mathbf{R}^n$

E　все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, трактуемые как линейные операторы в $\mathbf{R}^n$. Известно, что $\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B = \mathbf{R}^n$, где через $\operatorname{Im} X$ обозначается образ матрицы X. Кроме того, обозначим через $\operatorname{Ker} X$ ядро матрицы X. Тогда

A　$\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B = \{0\}$

B　$\operatorname{Im}(A + B) = \mathbf{R}^n$

C　$\operatorname{Ker}(A + B) \neq \{0\}$

D　$\operatorname{Ker} A + \operatorname{Ker} B = \mathbf{R}^n$

E　все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21.1.2 Вторая часть теста

1. Функция $f(x)$ задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots, & \text{если } 0 < x < \pi, \\ (\pi - x) + \dfrac{(\pi - x)^2}{2!} + \dfrac{(\pi - x)^3}{3!} + \ldots, & \text{если } x \geqslant \pi. \end{cases}$$

Обозначим через M множество, на котором определена функция $f(x)$ (соответствующий ряд сходится). Тогда

а) множество M открыто;

Да　　Нет

б) множество M замкнуто;

Да　　Нет

в) функция $f(x)$ ограничена на M;

Да　　Нет

г) функция $f(x)$ непрерывна на M;

Да　　Нет

д) функция $f(x)$ дифференцируема на M;

Да　　Нет

е) функция $f(x)$ имеет единственную точку локального минимума на M;

Да Нет

ж) график функции $f(x)$ имеет две точки перегиба;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту.

Да Нет

2. Даны функции $f(x, y) = y^2 - x^3$, $g(x, y) = y^2 + x^3$ и множество $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 = (x+5)(x^2+2x+4)\}$. Тогда

а) множество M ограничено;

Да Нет

б) множество M замкнуто;

Да Нет

в) если функция $f(x, y)$ принимает на множестве M значения f_0 и f_1, то она принимает и все значения из интервала (f_0, f_1);

Да Нет

г) наименьшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M равно 13;

Да Нет

д) наибольшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M равно 125;

Да Нет

е) число точек локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M нечетное;

Да Нет

ж) функция $g(x, y)$ на множестве M не достигает наименьшего значения;

Да Нет

з) наименьшее значение функции $g(x, y)$ на множестве M достигается в единственной точке.

Да Нет

3. Пусть $y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 2x(x^2 + y)$$

с начальным условием $y(0) = a$, где $a \in \mathbf{R}$ — параметр. Пусть множество $M \subset \mathbf{R}$ — область определения функции $y(x)$. Пусть $f(a) = \inf\limits_{x \in M} y(x)$ и A — область определения функции $f(a)$. Тогда

а) $M = \mathbf{R}$;

Да Нет

б) функция $y(x)$ чётная;

Да Нет

в) функция $y(x)$ имеет не более одного локального минимума;

Да Нет

г) функция $ay(x)$ имеет локальный минимум в точке $x = 0$;

Да Нет

д) существует $a \in \mathbf{R}$, при котором график функции $y(x)$ имеет ровно одну точку перегиба;

Да Нет

е) множество A ограничено снизу;

Да Нет

ж) множество A ограничено сверху;

Да Нет

з) функция $f(a)$ дифференцируема при всех $a \in A$.

Да Нет

4. Пусть A — ортогональная матрица порядка 3. Известно, что плоскость в $\mathbf{R}^3$, заданная уравнением $x_1 = 0$ инвариантна относительно A, и

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix},$$

где $\varphi \in [0, \pi]$ — параметр. Тогда

а) при любом $\varphi \in [0, \pi]$ существует единственная матрица A;

Да Нет

б) при любом $\varphi \in [0, \pi]$ существует ровно две матрицы A;

Да Нет

в) существует $\varphi \in [0, \pi]$ такое, что при этом φ у любой матрицы A множество инвариантных подпространств конечное;

Да Нет

г) существует $\varphi \in [0, \pi]$ такое, что при этом φ у любой матрицы A множество инвариантных подпространств бесконечное;

Да Нет

д) при $\varphi = 0$ любая матрица A кососимметричная;

Да Нет

е) при $\varphi = \pi$ любая матрица A симметричная;

Да Нет

ж) при любом $\varphi \in (0, \pi)$ любая матрица A не является симметричной;

Да Нет

з) если матрица A не является симметричной, то её определитель $\det A = -1$.

Да Нет

21.2 Ответы и решения теста

21.2.1 Ответы на вопросы первой части

1. B. **2.** B. **3.** B. **4.** E. **5.** E. **6.** C. **7.** D. **8.** E. **9.** A. **10.** E. **11.** B. **12.** A. **13.** C. **14.** E. **15.** D. **16.** A. **17.** B. **18.** A. **19.** D. **20.** C. **21.** B. **22.** D. **23.** D. **24.** E. **25.** D. **26.** A. **27.** C. **28.** A. **29.** D. **30.** C. **31.** D. **32.** E.

21.2.2 Решения задач второй части

Задача 1. Ряд $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots$ представляет ряд Тейлора функции $\ln(1+x)$. Множеством сходимости этого ряда является промежуток $(-1, 1]$, следовательно, $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, 0]$. Ряд $x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$ представляет ряд Тейлора функции $\sin x$. Множеством сходимости этого ряда является вся числовая прямая, следовательно, $f(x) = \sin x$, $x \in (0, \pi)$. Ряд $(\pi - x) + \dfrac{(\pi - x)^2}{2!} + \dfrac{(\pi - x)^3}{3!} + \ldots$ представляет ряд Тэйлора функции $e^{\pi - x} - 1$. Множеством сходимости этого ряда является вся числовая прямая, следовательно, $f(x) = e^{\pi - x} - 1$, $x \in [\pi, +\infty)$. Окончательно получаем:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & \text{если } x \in (-1, 0], \\ \sin x, & \text{если } x \in (0, \pi), \\ e^{\pi - x} - 1, & \text{если } x \in [\pi, +\infty). \end{cases}$$

Ответ на вопрос а) «да», на вопрос б) «нет». Так как $\lim\limits_{x\to -1+} f(x) = -\infty$, то ответ на вопрос в) «нет». На интервалах $(-1,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,+\infty)$ функция $f(x)$ является элементарной, поэтому в каждой точке $x \in M$, такой что $x \neq 0$, $x \neq \pi$ функция $f(x)$ непрерывна. Имеем: $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} \ln(1+x) = 0 = f(0)$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \sin x = 0 = f(0)$, значит $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$. Аналогично проверяется непрерывность в точке $x = \pi$. В каждой точке $x \in M$, такой что $x \neq 0$, $x \neq \pi$ функция $f(x)$ дифференцируема. Проверим дифференцируемость в точках $x = 0$, $x = \pi$. Имеем: $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, Значит, $f'(0)$ существует и $f'(0) = 1$. Далее, $\lim\limits_{x\to \pi-} \dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim\limits_{x\to \pi-} \dfrac{\sin x}{x-\pi} = \lim\limits_{x\to \pi-} \dfrac{\sin(\pi-x)}{x-\pi} = [y = \pi - x] = \lim\limits_{y\to 0+} \left(-\dfrac{\sin y}{y}\right) = -1$, $\lim\limits_{x\to \pi+} \dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim\limits_{x\to \pi+} \dfrac{e^{\pi-x}-1}{x-\pi} = [y = \pi - x] = \lim\limits_{y\to 0-} \left(-\dfrac{e^{y}-1}{y}\right) = -1$, Значит, $f'(\pi)$ существует и $f'(\pi) = -1$. Ответ на вопрос д) «да».

Уравнение $f'(x) = 0$ имеет единственное решение $x = \pi/2$ и это, очевидно, точка локального максимума. Ответ на вопрос е) «нет». Прямым дифференцированием проверяется, что $f''(x) < 0$ при $x \in (-1,0)$ и при $x \in (0,\pi)$, но $f''(x) > 0$ при $x \in (\pi,+\infty)$. Так как функция $f(x)$ дифференцируема в M, то отсюда следует, что график функции $f(x)$ имеет единственную точку перегиба $x = \pi$. Ответ на вопрос ж) «нет». Поскольку $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (e^{\pi-x} - 1) = -1$, то график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту. Ответ на вопрос з) «да». График функции $f(x)$ представлен на рис. 24.

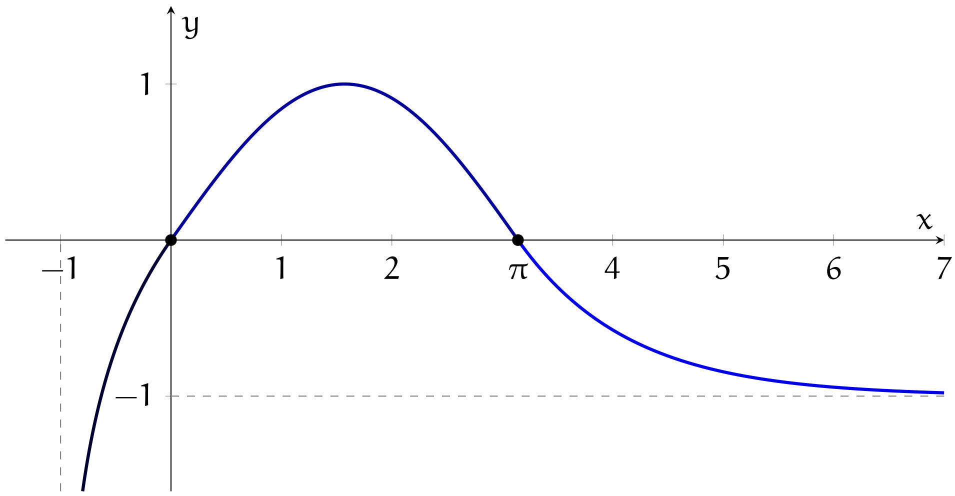


Рис. 24. График функции $f(x)$

Задача 2. Поскольку в левой части условия, определяющего множество M, стоит неотрицательная величина y^2, правая часть должна быть также неотрицательна. Это возможно только при $x \geqslant -5$ (поскольку дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + 2x + 4$ равен $-12 < 0$, а коэффициент при x^2 положителен, этот квадратный трехчлен не имеет вещественных корней и строго положителен). В то же время при любом $x \geqslant -5$ величина y^2 определяется однозначно. Поэтому числу $x = -5$ соответствует $y = 0$, а любому

$x > -5$ соответствует ровно два значения (равных по модулю, но имеющих разные знаки), $\pm\sqrt{y^2} = \pm\sqrt{(x+5)(x^2+2x+4))}$. Таким образом, множество M — это бесконечная кривая, симметричная относительно оси OX, лежащая правее прямой $x = -5$ и проходящая через точку $(x, y) = (-5, 0)$. Соответственно, данная кривая не ограничена и замкнута, и на вопрос а) ответ «нет», а на вопрос б) ответ «да».

Если подставить в функцию $f(x, y) = y^2 - x^3$ значение y^2 из условия, определяющего множество M, то получим, что $f(x, y)$ на множестве M (т.е. при $x \geqslant -5$) равна функции $h(x) = 7x^2 + 14x + 20$. Эта квадратичная функция, во-первых, строго положительна (ее дискриминант отрицателен, а коэффициент при x^2 положителен), а во-вторых, имеет в точке $x = -1$ локальный минимум, равный 13 (точка $x = -1$ — единственная точка при $x > -5$, где производная функции h обращается в ноль). Соответственно, поскольку эта функция гладкая, а ее аргумент может принимать любые значения из множества $[-5, +\infty)$, эта функция не ограничена и может принимать любые значения из множества $[13, +\infty)$. Соответственно, если эта функция принимает значения $f_0, f_1 \geqslant 13$, то она принимает и любые промежуточные значения между f_0 и f_1.

Поскольку, как уже было сказано, функция $h(x)$ при $x \geqslant -5$ не ограничена, то функция $f(x, y)$ на множестве M также не ограничена, поэтому у нее не может быть наибольшего значения.

В то же время точка локального максимума у функции $h(x)$ при $x \geqslant -5$ (и соответственно у функции $f(x, y)$ на множестве M) есть — это $x = -5$, граничная точка множества $[-5, +\infty)$ (соответственно, на множестве M это точка $(x, y) = (-5, 0) \in M$): правее точки $x = -5$ вплоть до точки $x = -1$ функция $h(x)$ убывает, поэтому $h(5) > h(x)$ $\forall x \in (-5, -1]$. Других точек локального максимума у функции $h(x)$ (и соответственно у функции $f(x, y)$ на M) нет: производная функции $h(x)$ отлична от нуля всюду, кроме $x = -1$, где у функции $h(x)$ локальный (и глобальный) минимум, а других граничных точек, кроме $x = -5$, область определения функции $h(x)$ не имеет. Соответственно, точка локального максимума единственна.

Поэтому получаем следующие ответы на вопросы в)–е): в) — «да», г) — «да», д) — «нет», е) — «да».

Что касается функции $g(x, y) = f(x, y) + 2x^3$, то на множестве M она совпадает с функцией $p(x) = 2x^3 + h(x) = 2x^3 + 7x^2 + 14x + 20$, $x \geqslant -5$. Функция $p(x)$ имеет строго положительную производную $p'(x) = 6x^2 + 14x + 14$ (коэффициент при x^2 положителен, а дискриминант равен $-140 < 0$, поэтому данный квадратный трехчлен не имеет вещественных нулей и строго положителен), поэтому $p(x)$ при $x \geqslant -5$ строго (и неограниченно) возрастает. Соответственно, наименьшее значение функции $p(x)$ при $x \geqslant -5$ (и соответственно функции $g(x, y)$ на множестве M) достигается в единственной граничной точке, т. е. при $x = -5$.

Поэтому на вопрос ж) получаем ответ «нет», а на вопрос з) — ответ «да».

Задача 3. Дифференциальное уравнение является линейным, поэтому его решение определено на всей числовой прямой, так что на вопрос а) можно сразу ответить «да». Кроме того, при замене x на $-x$ правая часть уравнения меняет знак на противоположный, так что на вопрос б) тоже можно сразу ответить «да» (решение $y(x)$, заданное на $[0,+\infty)$, имеет $y'(0)=0$, и его можно продолжить на $(-\infty,0)$ по формуле $y(-x)=y(x)$).

Для ответа на остальные вопросы будем решать линейное дифференциальное уравнение с использованием замены переменных $y(x)=u(x)v(x)$, где неизвестные функции $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют уравнениям $u'(x)=2xu(x)$, $v'(x)=2x^3/u(x)$. Решая первое из этих уравнений методом разделения переменных, получаем ненулевое решение $u(x)=$ $=e^{x^2}$. Подставляя это решение $u(x)$ во второе уравнение, получаем

$$v(x)=\int 2x^3e^{-x^2}dx=\int x^2e^{-x^2}d(x^2)=C-(x^2+1)e^{-x^2} \;\Rightarrow\; y(x)=u(x)v(x)=Ce^{x^2}-x^2-1.$$

Подключая начальное условие $y(0)=a$, получаем $y(x)=(a+1)e^{x^2}-x^2-1$ (график решения $y(x)$ при разных начальных условиях см. на рис. 25).

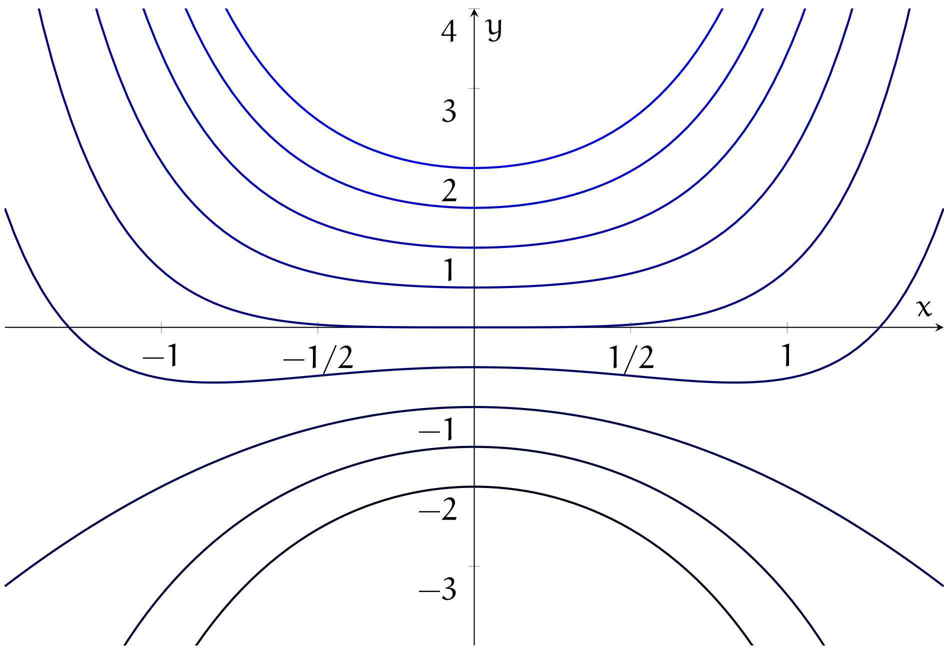


Рис. 25. Графики решений $y(x)$ задачи Коши при разных значениях a

Ответы на вопросы в)–з):

в). Условие первого порядка на локальный экстремум $y'(x)=2x\left((a+1)e^{x^2}-1\right)=0$ дает $x=0$ при всех $a\in\mathbf{R}$ или $x=\pm\sqrt{-\ln(a+1)}$ при $a\in(-1,0)$. Для проверки условия второго порядка вычислим $y''(x)=2(a+1)(1+2x^2)e^{x^2}-2$ в точках, где выполнено условие первого порядка: $y''(0)=2a$, $y''\left(\pm\sqrt{-\ln(a+1)}\right)=-4\ln(a+1)$. Последнее значение положительно при $a\in(-1,0)$, поэтому локальный минимум функции $y(x)$ достигается при таких a более чем в одной точке, так что ответ на в) — «нет».

г). Функция $ay(x)$ имеет локальный минимум в точке $x=0$ при любом $a\in\mathbf{R}$ (при $a>0$ функция $y(x)$ имеет в нуле локальный минимум, при $a<0$ — локальный максимум, а при $a=0$ функция $ay(x)\equiv 0$), так что ответ на г) — «да».

д). Уравнение $y''(x) = 0$ имеет решения только при $a \in (-1, 0]$, но при $a \in (-1, 0)$ имеются два решения, являющихся точками перегиба (в них $y''(x)$ меняет знак), а при $a = 0$, хотя решение и единственно ($x = 0$), но в нем $y''(x)$ не меняет знака, оставаясь положительным и при $x > 0$, и при $x < 0$ — это локальный минимум, а не точка перегиба. Поэтому ответ на д) — «нет».

е)–з). Из приведенных выше вычислений следует, что

$$f(x) = \begin{cases} y(0) = a, & a \geqslant 0, \\ y\left(\pm\sqrt{-\ln(a+1)}\right) = \ln(a+1), & -1 < a < 0. \end{cases}$$

Если $a \leqslant -1$, то функция $y(x)$ неограничена снизу. Поэтому $A = (-1, +\infty)$, так что ответы на е) и ж) — соответственно, «да» и «нет». Кроме того, $f'(0) = 1$ как по формуле для $a \geqslant 0$, так и по формуле для $-1 < a < 0$. Поэтому функция $f(a)$ дифференцируема при $a = 0$, как и при всех прочих $a \in A$, так что ответ на з) — «да».

Задача 4. Обозначим плоскость, заданную уравнением $x_1 = 0$, через L. Так как матрица A ортогональная, а L инвариантно относительно A, то и $L^\perp = \langle (1,0,0)^T \rangle$ тоже инвариантно относительно A. И так как подпространство $L^\perp$ одномерное, то вектор $(1,0,0)^T$ собственный и $A(1,0,0)^T = (\alpha, 0, 0)^T$. Векторы $(0,1,0)^T$ и $(0,0,1)^T$ образуют базис в L, поэтому $A(0,1,0)^T = (0, \beta, \gamma)$. Таким образом,

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix},$$

откуда получаем, что

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}.$$

Из инвариантности L также следует, что $A(0,0,1)^T = (0, x, y)^T$. Найдем x и y. Так как матрица A ортогональная, то, во-первых, $x^2 + y^2 = 1$, и во-вторых, $x\cos\varphi + y\sin\varphi = 0$. Эта система имеет два решения: $x = -\sin\varphi$, $y = \cos\varphi$ и $x = \sin\varphi$, $y = -\cos\varphi$ (геометрическое представление см. на рис. 26). Таким образом, существует две матрицы A, удовлетворяющие поставленным условиям:

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Соответственно, ответы на вопросы а) — «нет», б) — «да».

При любом $\varphi \in [0, \pi]$ второй вариант матрицы A — симметричная матрица, а значит диагонализируемая. Так как она ортогональная, то для нее возможны только два собственных числа: -1 и 1. А так как она имеет порядок три, то по крайней мере одно ее

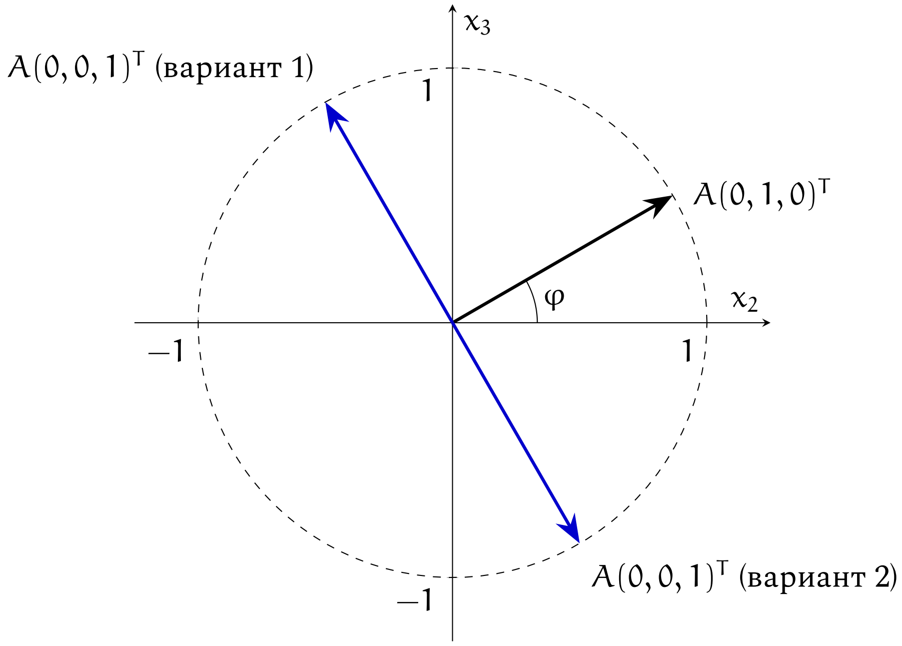


Рис. 26. Образы базисных векторов на плоскости L

собственное подпространство имеет размерность, большую единицы. Следовательно, такая матрица A имеет бесконечно много инвариантных подпространств, ответы на вопросы в) — «нет», ж) — «нет».

Рассмотрим $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$. В этих случаях оба варианта матрицы A симметричные и имеют бесконечно много инвариантных подпространств. Ответы на вопросы г) — «да», д) — «нет», е) — «да».

И, наконец, определитель матрицы A для несимметричного случая можно сосчитать непосредственно. Он равен $(-1) \cdot (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = -1$, ответ на вопрос з) — «да».

22 Вступительный экзамен 2021 г.

Экзамен по математике проводился в форме онлайнового теста. Продолжительность экзамена составляла 3 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

22.1 Тест

22.1.1 Первая часть теста

1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x(e^x+1)}, & x \neq 0, \\ e^{-1}, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда функция $f(x)$

A непрерывная

B четная

C достигает наибольшего значения на $\mathbf{R}$

D достигает наименьшего значения на $\mathbf{R}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Предел $\lim\limits_{x\to\pi-}(\sin^2 x)^{\operatorname{tg}(x/2)}$ равен

A 0

B 1

C e

D $\pi/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

3. Дана функция $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ и множество $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + 3xy + y^2 = 2\}$. Тогда

A наибольшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M равно $\ln(7/5)$

B наибольшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M достигается в точке $(x, y) = (\sqrt{2/5}, \sqrt{2/5}\,)$

C наименьшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M равно $\ln(4/5)$

D наименьшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M достигается в точке $(x, y) = (-\sqrt{2/5}, \sqrt{2/5}\,)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ задана рекуррентно: $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2/4 + 1$, $n = 1, 2, \ldots$, где $a \geqslant 0$. Тогда

A существует такое число $a \geqslant 0$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ является строго убывающей

B при любом $a \geqslant 0$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ является ограниченной

C при любом $a \in [0, 1]$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ сходится

D при любом $a \in [2, 3]$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ расходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Функция $f(x, y) = 2|x| - |y|$ на множестве $\{(x, y) \colon xy = 16\}$

A достигает наименьшего значения в единственной точке

B достигает наименьшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения в единственной точке

D достигает наибольшего значения ровно в двух точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Функция

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 8x + 24}$$

на интервале $(-4, 0)$

A ограничена сверху и достигает наибольшего значения

B ограничена сверху, но не достигает наибольшего значения

C ограничена снизу и достигает наименьшего значения

D неограничена ни сверху, ни снизу

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные.

7. Через точку (a, b), $a > 0$, $b > 0$ координатной плоскости проведена прямая, пересекающая оси в положительных точках. Чему равен угловой коэффициент этой прямой, если отрезок прямой, заключенный между осями, имеет наименьшую длину?

A $-b/a$

B $-\sqrt{b/a}$

C $-\sqrt[3]{b/a}$

D $-\sqrt[3]{b^2/a}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

8. Пусть $f_n(x) = ne^{-n|x|}$, $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим через M множество тех x, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, и для $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда

A $(0, 2) \subset M$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$

B последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на M

C $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^2 (x + 4)f_n(x)dx = 4$

D функция $f(x)$ имеет разрывы первого рода

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Существует касательная прямая к окружности $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$, проходящая через начало координат и имеющая угловой коэффициент, равный

A $\dfrac{4 - \sqrt{7}}{3}$

B $\dfrac{5-\sqrt{2}}{2}$

C $\dfrac{6-\sqrt{3}}{4}$

D $\dfrac{7-\sqrt{2}}{5}$

E не существует касательной к указанной окружности, проходящей через начало координат и угловым коэффициентом, равным одному из перечисленных в A, B, C, D

10. Неявная функция $y(x)$ в окрестности точки $A = (x, y) = (-1, 1)$ задана соотношением $3x^3 + 2x^2 - 4x + 4y^2 + 2y - 9 = 0$. Тогда площадь треугольника, образованного координатными осями и касательной к графику функции $y(x)$, проведенной в точке A, равна (укажите ближайшее число)

A 1

B 2

C 3

D 4

E 5

11. Многочлен $p(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ на вещественной прямой

A имеет один корень

B имеет два корня

C имеет три корня

D имеет четыре корня

E имеет больше четырех корней либо совсем не имеет корней

12. Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2 - 5n - 6}$$

равна

A 1

B 1/2

C 1/5

D 1/10

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

13. Функция $f(x)$ задана и непрерывна на всей числовой прямой $\mathbf{R}$. Известно, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Тогда

A $\quad$ функция $f(x)$ достигает наименьшего значения

B $\quad$ функция $f(x)$ достигает наибольшего значения

C $\quad$ функция $f(x)$ имеет локальный экстремум

D $\quad$ существует такая точка x_0, что $f(x_0) = 0$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Множество $M \subset \mathbf{R}$ не имеет предельных точек. Тогда

A $\quad$ множество M замкнутое

B $\quad$ множество M открытое

C $\quad$ множество M ограниченное

D $\quad$ множество M содержит не изолированные точки

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\left(\sqrt{n+1}\right) - \cos\left(\sqrt{n}\right)\right)$ равен

A $\quad$ $-1/2$

B $\quad$ 0

C $\quad$ $1/2$

D $\quad$ 1

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

16. Дана функция $f(x, y) = x + y$ и множество $M = \{(x, y)\colon 2\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 2\}$. Тогда

A $\quad$ число локальных максимумов функции $f(x, y)$ на множестве M не больше 2

B $\quad$ точка $(16/25, 4/25)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M

C $\quad$ в точке $(1, 0)$ функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M

D $\quad$ число локальных минимумов функции $f(x, y)$ на множестве M четно

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+a_1)(n+a_2)(n+a_3)}-n\right)$, где a_1, a_2, $a_3>0$, равен

A $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$

B $\sqrt[3]{a_1+a_2+a_3}$

C $\sqrt[3]{a_1^3+a_2^3+a_3^3}$

D $\dfrac{\ln(a_1a_2a_3)}{3}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

18. Задана функция

$$f(x)=\begin{cases}x^4\sin(1/x), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

Какие из утверждений I, II, III являются истинными?

I. Функция $f(x)$ непрерывна в $\mathbf{R}$

II. Функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема в $\mathbf{R}$

III. Функция $f(x)$ дважды дифференцируема в $\mathbf{R}$ и вторая производная разрывна

A только I

B только II

C только I, II

D I, II, III

E ни один из вариантов, перечисленных в A, B, C, D, не дает правильный набор ответов

19. Дана функциональная последовательность $\left\{f_n(x)=\dfrac{nx^3}{1+n^2x^6}, n=1,2,\ldots\right\}$. Обозначим через M множество тех $x\in\mathbf{R}$, для которых существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, и для $x\in M$ обозначим $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. Тогда

A множество M ограниченное

B функция $f(x)$ неограниченная

C последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[-1,1]$

D последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[2,+\infty)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{n^2}$. Обозначим его сумму через $S(x)$. Найдите ***ложное*** утверждение.

A ряд сходится при любом вещественном x

B на множестве $[0, +\infty)$ ряд сходится равномерно

C уравнение $S(x) = 1$ имеет единственное решение

D функция $S(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

21. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(\ln(x+y))^n$. Обозначим через M множество тех точек (x, y), для которых ряд сходится, и через $S(x, y)$ — сумму ряда для $(x, y) \in M$. Тогда

A множество M открытое

B множество M замкнутое

C множество M ограниченное

D функция $S(x, y)$ является неограниченной

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{k^2 + n^2}$ равен

A π

B $1/2$

C $\pi/4$

D 1

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

23. Неопределенный интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + 4x^2}$ равен

A $-\dfrac{1}{4x} - \dfrac{1}{8} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2} + C$

B $\dfrac{1}{4} \operatorname{arctg} \dfrac{x^2}{4} + 2 \ln |x| + C$

C $\ln \left(\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^3}{3}\right) - \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{4} + C$

D $\dfrac{1}{2}|x| - \dfrac{1}{4} \ln(x^2 + 1) + \dfrac{1}{4} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2} + C$

E семейству функций, отличных от перечисленных в A, B, C, D

24. Неопределенный интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$ равен

A $\dfrac{(e^x+1)^{3/2}+1}{e^x+1}+C$

B $\dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{e^x+1}-1\right)+2\ln\left(\sqrt{e^x+1}+1\right)+C$

C $\ln\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$

D $\dfrac{(e^x+1)^{3/2}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$

E семейству функций, отличных от перечисленных в A, B, C, D

25. Интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{2-x^2}}$ равен

A $\pi/2$

B $\pi/4$

C $1/\sqrt{2}$

D $1/2\sqrt{2}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

26. Площадь фигуры, образованной графиками функций $y=\operatorname{ctg} x$ и $y=\operatorname{tg} x$ и прямыми $x=\pi/12$ и $x=\pi/4$, равна

A $\ln 2$

B $2\ln 2$

C $\ln 3$

D $2\ln 3$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

27. Площадь фигуры между графиками функций $y=x^2-c^2$ и $y=c^2-x^2$, где c — положительный параметр, равна 72. Тогда параметр c равен

A 1

B 2

C 3

D 6

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

28. Функция $f(x)$ обладает следующим свойством: $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ при любых $x,y\in\mathbf{R}$. Тогда

A функция $f(x)$ непрерывна

B функция $f(x)$ дифференцируема

C функция $f(x)$ ограничена

D уравнение $f(x) = x$ имеет хотя бы одно решение

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

29. Функции $f(x)$ и $g(y)$ определены на всей числовой прямой. Пусть $h(x, y) = f(x)g(y)$. Тогда

A если функция $h(x, y)$ непрерывна, то функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны

B если функция $h(x, y)$ ограничена, то функции $f(x)$ и $g(y)$ ограничены

C если уравнение $h(x, y) = 0$ имеет решения, то уравнения $f(x) = 0$ и $g(y) = 0$ имеют решения

D если уравнение $h(x, y) = 0$ не имеет решений, то уравнения $f(x) = 0$ и $g(y) = 0$ не имеют решений

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. В трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$ со стандартным скалярным произведением задан вектор $a = (2, 2, 2)^T$. Пусть L — подпространство, порожденное вектором a. Тогда матрица оператора ортогонального проектирования пространства $\mathbf{R}^3$ на L есть

A $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

E матрица, отличная от перечисленных в A, B, C, D

31. Пусть A — матрица размера $m \times n$, $m, n \geqslant 2$. Через $\det X$ обозначим определитель квадратной матрицы X. Тогда

A если $\det(AA^{\mathsf{T}}) \neq 0$, то $\det(A^{\mathsf{T}}A) \neq 0$

B если $\det(AA^{\mathsf{T}}) = \det(A^{\mathsf{T}}A)$, то $m = n$

C $\det(I + 3AA^{\mathsf{T}}) \neq 0$, где I — единичная матрица

D если столбцы матрицы A линейно независимы, то $\det(AA^{\mathsf{T}}) \neq 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Даны матрицы A и B размеров $m \times n$ и $n \times m$ соответственно, где $m, n \geqslant 2$. Известно, что матрица AB невырожденная. Обозначим через $\operatorname{rank} X$ ранг матрицы X. Тогда

A $m < n$

B $m \geqslant n$

C $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} BA$

D $\operatorname{rank} AB \neq \operatorname{rank} BA$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22.1.2 Вторая часть теста

1. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix},$$

где α — вещественный параметр, трактуется как линейный оператор в $\mathbf{R}^3$. Обозначим через $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$ ядро и образ матрицы A соответственно. Тогда

а) число 0 является собственным числом A;

Да Нет

б) число α является собственным числом A;

Да Нет

в) существует единственное α, при котором подпространство $\operatorname{Im} A$ одномерное;

Да Нет

г) $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^2$;

Да Нет

д) $\operatorname{Im} A + \operatorname{Ker} A = \mathbf{R}^3$;

Да Нет

е) существует базис в $\mathbf{R}^3$, состоящий из собственных векторов A;

Да Нет

ж) существует α, при котором A — проектор;

Да Нет

з) существует ненулевой вектор x, принадлежащий образу A при любом α.

Да Нет

2. Даны функция $f(x, y, z) = z$ и множество $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon x^2+y^2 = 4, (x-1)^2+z^2 = 9\}$. Тогда

а) множество M ограниченное;

Да Нет

б) множество M замкнутое;

Да Нет

в) функция $f(x, y, z)$ на множестве M достигает наибольшего значения в двух точках;

Да Нет

г) функция $f(x, y, z)$ на множестве M достигает наименьшего значения в единственной точке;

Да Нет

д) точка $\left(2, 0, 2\sqrt{2}\right)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M;

Да Нет

е) точка $\left(1, \sqrt{3}, 3\right)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M;

Да Нет

ж) в точке $\left(1, -\sqrt{3}, -3\right)$ функция $f(x, y, z)$ достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

з) точка $(-2, 0, 0)$ является точкой локального экстремума функции $f(x, y, z)$ на множестве M.

Да Нет

3. Задана функция

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\left(1-\cos\dfrac{ax+b}{n}\right)\right), & \text{если } x\leqslant -1,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(n\ln\left(1+\dfrac{c\sqrt{1-x}}{n}\right)\right), & \text{если } -1<x\leqslant 1,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1/\ln(x-1)}-1\right)\right), & \text{если } x>1,\end{cases}$$

где a, b, c — вещественные параметры и $c>0$. Область определения функции $f(x)$ — это множество M тех чисел x, для которых существуют пределы в соответствующих областях. Тогда

а) множество M ограниченное;

Да Нет

б) множество M замкнутое;

Да Нет

в) при любом $c>0$ функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(-1,2)$;

Да Нет

г) при любых a, b и $c>0$ у графика функции $f(x)$ есть вертикальная касательная;

Да Нет

д) существуют такие числа a, b и $c>0$, что график функции $f(x)$ имеет наклонную (не горизонтальную и не вертикальную) асимптоту;

Да Нет

е) если $a=1$, $b=3$, $c=\sqrt{2}$, то функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(-3,0)$;

Да Нет

ж) при $c=\sqrt{2}$ существуют такие числа a, b, что функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(-3,0)$;

Да Нет

з) при любых a, b и $c>0$ график функции $f(x)$ имеет вертикальную асимптоту.

Да Нет

4. Функция $y(x)$ является решением задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'=\frac{y}{x}-e^{y/x}$$

с начальным условием $y(1)=a$, $a\in\mathbf{R}$. Пусть M — область определения функции $y(x)$, E — множество ее значений. Тогда а) $E = \mathbf{R}$;

Да Нет

б) Функция $y(x)$ ограничена снизу на M;

Да Нет

в) Функция $y(x)$ на множестве M имеет экстремум;

Да Нет

г) $\lim\limits_{x\to+0} y(x) = 0$;

Да Нет

д) При любом $b > 0$ уравнение $y(x) = b$ имеет решение;

Да Нет

е) Если $x_0(a)$ — корень уравнения $y(x) = 0$, то $\lim\limits_{a\to+\infty} x_0(a) = e$;

Да Нет

ж) Если $x_0(a)$ — корень уравнения $y(x) = 0$, то $\lim\limits_{a\to-\infty} x_0(a) = 1/e$;

Да Нет

з) График функции $y(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

22.2 Ответы и решения теста

22.2.1 Ответы на вопросы первой части

1. B. **2.** A. **3.** C. **4.** C. **5.** E. **6.** B. **7.** C. **8.** C. **9.** A. **10.** D. **11.** B. **12.** D. **13.** C. **14.** A. **15.** B. **16.** B. **17.** A. **18.** D. **19.** D. **20.** B. **21.** B. **22.** C. **23.** A. **24.** C. **25.** A. **26.** A. **27.** C. **28.** A. **29.** D. **30.** E. **31.** C. **32.** C.

22.2.2 Решения задач второй части

Задача 1. Запишем характеристическое уравнение

$$\det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1+\alpha-\lambda \end{pmatrix} = (\alpha-\lambda)(\lambda-(1+2\alpha))\lambda = 0,$$

откуда получим его корни $\lambda = 0$, $\lambda = \alpha$, $\lambda = 1 + 2\alpha$. Ответы на вопросы а) — да, б) — да.

Далее заметим, что угловой минор $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ матрицы A при $\alpha \neq 0$ не равен нулю, а при $\alpha = 0$ матрица A имеет ранг 1, поэтому $\operatorname{Im} A$ является одномерным только при $\alpha = 0$ (ответ на вопрос в) — да).

Рассмотрим случай $\alpha = -1/2$, при котором ноль является собственным числом алгебраической кратности 2 и геометрической кратности 1 (так как $\operatorname{rank} A = 2$), соответственно, ответ на вопрос е) — нет. При этом

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/2 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда $\operatorname{rank} A^2 = 1$, поэтому при $\alpha = -1/2$ образ $\operatorname{Im} A \neq \operatorname{Im} A^2$ (ответ на вопрос г) — нет). Кроме того, так как последний столбец матрицы A^2 равен нулю, то вектор $(1, -1/2, 1/2)^{\mathsf{T}}$ (последний столбец матрицы A) принадлежит как ядру, так и образу матрицы A, откуда немедленно следует, что $\operatorname{Im} A + \operatorname{Ker} A \neq \mathbf{R}^3$ при $\alpha = -1/2$ (ответ на вопрос д) — нет).

Для того, чтобы матрица A была проектором, необходимо, чтобы ее собственные числа были равны нулю и/или единице. Это возможно только при $\alpha = 0$. Нетрудно убедиться, что при этом $A^2 = A$ и ответ на вопрос ж) — да. Далее, рассмотрим вектор $(1, 0, 1)^{\mathsf{T}}$ (любой ненулевой вектор, принадлежащий образу A при $\alpha = 0$ ему пропорционален). Легко видеть, что этот вектор является образом вектора $(0, -1, 1)^{\mathsf{T}}$ при любом α, поэтому ответ на вопрос з) — да.

Задача 2. Пусть $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4$, $g_2(x, y, z) = (x-1)^2 + z^2 - 9$. Множество M является замкнутым как пересечение двух множеств точек, в которых непрерывные функции g_1 и g_2 принимают нулевое значение. Кроме того, множество M является ограниченным: из того, что $x^2 + y^2 = 4$ и $z^2 = 9 - (x-1)^2 \leqslant 9$, следует, что все точки $(x, y, z) \in M$ удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 13$. Поэтому ответы на пп. а) и б) — да.

Для ответа на остальные вопросы воспользуемся методом множителей Лагранжа. Выпишем функцию Лагранжа:

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = z + \lambda(x^2 + y^2 - 4) + \mu((x-1)^2 + z^2 - 9).$$

Необходимые условия первого порядка на локальный экстремум имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2\lambda x + 2\mu(x-1) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2\lambda y = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 1 + 2\mu z = 0.$$

Из второго уравнения получаем два случая: $\lambda = 0$ или $y = 0$.

Если $\lambda = 0$, то из первого уравнения следует, что $\mu = 0$ или $x = 1$, а так как вариант $\mu = 0$ невозможен в силу третьего уравнения, то $x = 1$, откуда $y = \pm\sqrt{3}$ (из $g_1(x, y, z) = 0$),

$z = \pm 3$ (из $g_2(x, y, z) = 0$), $\mu = -\dfrac{1}{2z} = \mp\dfrac{1}{6}$. Получаем четыре точки, подозрительные на локальный экстремум: $A = \left(1, \sqrt{3}, 3\right)$, $B = \left(1, -\sqrt{3}, 3\right)$, $C = \left(1, \sqrt{3}, -3\right)$, $D = \left(1, -\sqrt{3}, -3\right)$.

Для идентификации возможных локальных экстремумов в этих точках можно воспользоваться условиями второго порядка: исследовать квадратичную форму гессиана функции L на положительную / отрицательную определённость в ограничении на касательное подпространство к множеству M в соответствующей точке.

Для нахождения последнего нам понадобится матрица Якоби отображения $(g_1, g_2)^\mathsf{T}$, которая имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} g_1'(x, y, z) \\ g_2'(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x - 2 & 0 & 2z \end{pmatrix}.$$

Если строки матрицы J линейно независимы (случай, когда это не так, рассматривается ниже), то касательное подпространство является линейной оболочкой ненулевого вектора, ортогонального обеим строкам матрицы J. Можно в этом качестве использовать вектор $v = (zy, -zx, (1 - x)y)^\mathsf{T}$: если $\operatorname{rank} J = 2$, то $v \neq 0$ и $Jv = 0$.

Матрица вторых производных функции L имеет вид

$$L'' = \begin{pmatrix} 2\lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$v^\mathsf{T} L'' v = 2\left((\lambda + \mu)z^2y^2 + \lambda z^2x^2 + \mu(1 - x)^2y^2\right).$$

Подставив сюда вычисленные значения переменных для точек A, B, C, D, получаем $v^\mathsf{T} L'' v = 54\mu = -9$ для точек A и B и 9 для точек C и D. В первом случае квадратичная форма гессиана функции L отрицательно определённая в ограничении на касательное подпространство, а во втором — положительно определённая. Следовательно, в точках A и B функция f достигает локального максимума на множестве M, а в точках C и D — локального минимума. Поэтому ответ на п. е) — да.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $y = 0$. Из ограничения $g_1(x, y, z) = 0$ получаем $x = \pm 2$, а из ограничения $g_2(x, y, z) = 0$ — $z = \pm 2\sqrt{2}$ при $x = 2$ и $z = 0$ при $x = -2$. Впрочем, последнее невозможно в силу третьего уравнения из условий первого порядка. Получаем ещё две точки: $E = \left(2, 0, 2\sqrt{2}\right)$ с $\mu = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$, $\lambda = \dfrac{1}{8\sqrt{2}}$, и $F = \left(2, 0, -2\sqrt{2}\right)$ с $\mu = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$, $\lambda = -\dfrac{1}{8\sqrt{2}}$.

Проверим условия второго порядка в точках E и F: $v^\mathsf{T} L'' v = 32\lambda = \sqrt{8}$ для точки E и $-\sqrt{8}$ для точки F. Следовательно, в точке E функция f достигает локального минимума на множестве M, а в точке F — локального максимума. Поэтому ответ на п. д) — нет.

Кроме того, необходимо проверить условие регулярности, чтобы выявить возможные точки экстремума, не являющиеся регулярными. Условие регулярности нарушается, если $\operatorname{rank} J < 2$, т.е. все миноры второго порядка матрица J равны нулю: $(x-1)y = xz = yz = 0$. Если $x = 1$, то $z = 0$, а тогда нарушается ограничение $g_2(x, y, z) = 0$. Если же $x \neq 1$, то $y = 0$, откуда $x = \pm 2$ (так как $g_1(x, y, z) = 0$) и $z = 0$. Из $g_2(x, y, z) = 0$ получаем $x = -2$. Таким образом, имеется единственная нерегулярная точка $G = (-2, 0, 0)$. Эта точка могла бы быть локальным экстремумом. Но рассмотрение близких к ней точек множества M показывает, что экстремума здесь нет. Действительно, пусть $x = -2 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малая величина (вариант $\varepsilon < 0$ не рассматривается, так как противоречит ограничению $g_1(x, y, z) = 0$). Тогда $y = \pm\sqrt{\varepsilon(4-\varepsilon)}$ и $z = \pm\sqrt{\varepsilon(6-\varepsilon)}$. Каждая из этих четырёх точек (x, y, z) стремится к G при $\varepsilon \to 0+$, и при этом значение функции $f(x, y, z) = z$ в них может быть как больше, так и меньше её значения в точке G, равного 0. Поэтому ответ на п. з) — нет.

Функция $f(x, y, z)$ на множестве M достигает наибольшего значения в некоторых точках (это следует из ответов на пп. а)–б) и теоремы Вейерштрасса), и это должны быть точки локального максимума, т.е. точки A, B или F. Из этих точек значение функции $f(x, y, z) = z$ максимально в точках A и B, поэтому ответ на п. в) — да.

Аналогично получаем, что $f(x, y, z)$ на множестве M достигает наименьшего значения, равного -3, в точках C и D, поэтому ответ на п. г) — нет, а на п. ж) — да.

Задача 3. По формуле Тейлора

$$1 - \cos\frac{ax+b}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{ax+b}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty.$$

Значит, $f(x) = \dfrac{(ax+b)^2}{2}$ при $x \leqslant 1$.

По формуле Тейлора

$$\ln\left(1 + \frac{c\sqrt{1-x}}{n}\right) = \frac{c\sqrt{1-x}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Значит, $f(x) = c\sqrt{1-x}$ при $-1 < x \leqslant 1$.

По формуле Тейлора

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/\ln(x-1)} - 1 = \frac{1}{n\ln(x-1)} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Заметим, что функция $f(x)$ не определена при $x = 2$. Значит, $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x-1)}$ при $x > 1$, $x \neq 2$.

Получаем:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(ax+b)^2}{2}, & x \leqslant -1, \\ c\sqrt{1-x}, & -1 < x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{\ln(x-1)}, & x > 1,\ x \neq 2. \end{cases}$$

Ответы на вопросы а) — нет, б) — нет, в) — нет.

Далее, $\lim\limits_{x\to 1-} c\sqrt{1-x} = 0 = f(0)$ при любом $c > 0$ и $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{1}{\ln(x-1)} = 0$. Значит, при любом $c > 0$ функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 1$. Так как

$$\lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim\left(-\frac{c}{2\sqrt{1-x}}\right) = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 1+} f'(x) = \lim\left(-\frac{1}{(x-1)\ln^2(x-1)}\right) = -\infty,$$

то в точке $x = 1$ у графика функции $f(x)$ есть вертикальная касательная. Ответ на вопрос г) — да.

Если $a \neq 0$, то при при $x \leqslant -1$ функция $f(x)$ является квадратичной, и ее график — парабола, не имеющая наклонной асимптоты. Если $a = 0$, то функция $f(x)$ постоянная и ее график тоже не имеет наклонной асимптоты. Кроме того, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(x-1)} = 0$, значит, наклонной асимптоты нет. Ответ на вопрос д) — нет.

При $a = 1$, $b = 3$, $c = \sqrt{2}$ имеем: $f(x) = \dfrac{(x+3)^2}{2}$, $-1 < x \leqslant -1$ и $f(x) = \sqrt{2(1-x)}$, $-1 < x < 0$. Так как $f(-1) = 2 = \lim\limits_{x\to-1-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1+} f(x)$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = -1$. В остальных точках интервала $(-3, 0)$ функция является элементарной и, следовательно, непрерывна. Ответ на вопрос е) — да.

Для дифференцируемости $f(x)$ на интервале $(-3, 0)$ достаточно выполнения условий: 1) $f(-1) = \dfrac{(b-a)^2}{2} = 2$ — непрерывность; 2) $\lim\limits_{x\to-1-} f'(x) = \lim\limits_{x\to-1-} (a(ax+b)) = \lim\limits_{x\to-1+} f'(x) = \lim\limits_{x\to-1+} \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2(1-x)}}\right) = -\dfrac{1}{2}$ — совпадение левой и правой производных. Получаем систему уравнений $(b-a)^2 = 4$, $a(b-a) = -1/2$, у которой есть, например, решение $a = -1/4$, $b = 9/4$. Ответ на вопрос ж) — да.

Так как $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = +\infty$, то прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$. Ответ на вопрос з) — да.

Задача 4. Прежде всего отметим, что правая часть не определена при $x = 0$. Поскольку начальное условие задано в точке $x = 1$, то решение данного дифференциального уравнения может быть определено лишь на некотором подмножестве полупрямой $x > 0$.

Далее, поскольку правая часть дифференциального уравнения зависит только от комбинации y/x, сделаем замену: $y(x)/x = z(x)$, или $y(x) = x \cdot z(x)$. После этой замены дифференциальное уравнение примет вид

$$x \cdot z' + z = z - e^z, \quad \text{или} \quad x \cdot z' = -e^z.$$

Полученное уравнение легко решается разделением переменных:

$$e^{-z}\,dz = -\frac{dx}{x},$$

или

$$-d(e^{-z}) = -d(\ln|x|),$$

откуда получаем (учитывая, что, как было отмечено выше, $x > 0$)

$$e^{-z} = \ln(x) + C,$$

или

$$z = -\ln[\ln(x) + C].$$

Возвращаясь к функции $y(x) = x \cdot z(x)$, получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = -x \ln[\ln(x) + C].$$

Используя начальное условие, находим значение константы C: $a = -\ln(C)$, или $C = e^{-a}$. Таким образом, решение дифференциального уравнения с учетом начального условия принимает вид

$$y = -x \ln[\ln(x) + e^{-a}].$$

Изучим свойства этого решения. Во-первых, заметим, что функция $y(x)$ определена только для тех значений аргумента, для которых $\ln(x) + e^{-a} > 0$, т.е. для $x > e^{-e^{-a}}$.

Во-вторых, заметим, что производная $y'(x)$ нигде не обращается в ноль. Если бы нашлась такая точка x_0, в которой $y'(x_0) = 0$, то в этой точке было бы выполнено равенство

$$\frac{y}{x} = e^{y/x},$$

т.е. существовало бы решение уравнения

$$u = e^{u}.$$

Однако это уравнение не имеет решения, поскольку $e^u > u \; \forall u \in \mathbf{R}$. Поэтому производная $y'(x) < 0$ и не меняет знак на всей области определения функции $y(x)$. Другими словами, на всей области определения функция $y(x)$ строго убывает.

Наконец, найдем пределы при $x \to \infty$ и при $x \to e^{-e^{-a}} + 0$. Первый предел находится легко: поскольку при $x \to +\infty$ функция $\ln(x)$ неограниченно возрастает, то неограниченно возрастает и функция $x \ln[\ln(x) + e^{-a}]$, поэтому $y(x) = -x \ln[\ln(x) + e^{-a}] \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

Рассмотрим второй предел. Представим x в виде $x = (1 + \varepsilon) \cdot e^{-e^{-a}}$ и рассмотрим функцию $y(x)$ при $\varepsilon \to +0$:

$$\begin{aligned}
y(x) &= -(1+\varepsilon) \cdot e^{-e^{-a}} \ln[\ln((1+\varepsilon)e^{-e^{-a}}) + e^{-a}] \\
&= -(1+\varepsilon) \cdot e^{-e^{-a}} \ln[\ln(1+\varepsilon) + \ln(e^{-e^{-a}}) + e^{-a}] \\
&= -(1+\varepsilon) \cdot e^{-e^{-a}} \ln[\ln(1+\varepsilon) - e^{-a} + e^{-a}] \\
&= -(1+\varepsilon) \cdot e^{-e^{-a}} \ln[\ln(1+\varepsilon)] \\
&= -(1+\varepsilon) \cdot e^{-e^{-a}} \ln[\varepsilon + o(\varepsilon)].
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $y(x) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +0$, т.е. при $x \to e^{-e^{-a}} + 0$.

Теперь легко ответить на вопросы задачи. Поскольку функция $y(x)$ определена и дифференцируема при $x > e^{-e^{-a}}$, причем $y'(x) < 0$, $y(x) \to +\infty$ при $x \to e^{-e^{-a}} + 0$ и $y(x) \to$ $\to -\infty$ при $x \to +\infty$, то функция $y(x)$ может принимать любые вещественные значения, поэтому на вопрос а) ответ да. При этом функция $y(x)$ не ограничена снизу, поэтому на вопрос б) ответ нет. Кроме того, поскольку функция $y(x)$ строго монотонно убывает на всей области определения, то она не имеет экстремумов, так что на вопрос в) ответ нет.

Далее, поскольку функция $y(x)$ не определена при $0 < x \leqslant e^{-e^{-a}}$, ее предел при $x \to +0$ не существует, поэтому на вопрос г) ответ нет.

Как уже говорилось выше, функция $y(x)$ может принимать любые вещественные значения, поэтому при любом $b \in \mathbf{R}$ существует решение уравнения $y(x) = b$, поэтому на вопрос д) ответ да.

Уравнение $y(x) = 0$ легко решается: поскольку всегда $x > e^{-e^{-a}} > 0$, то $y(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\ln(x) + e^{-a} = 1$. Отсюда находится корень уравнения:

$$x_0 = x_0(a) = \exp[1 - e^{-a}].$$

Соответственно легко находятся пределы:

$$\lim_{a\to+\infty} x_0(a) = \lim_{a\to+\infty} \exp[1 - e^{-a}] = \exp[1] = e, \quad \text{поскольку} \quad \lim_{a\to+\infty} e^{-a} = 0.$$

Соответственно на вопрос е) ответ да.

Второй предел, при $a \to -\infty$, находится также легко:

$$\lim_{a\to-\infty} x_0(a) = \lim_{a\to-\infty} \exp[1 - e^{-a}] = 0, \quad \text{поскольку } e^{-a} \to +\infty \text{ при } a \to -\infty.$$

Соответственно на вопрос ж) ответ нет, поскольку предел равен нулю, а не $1/e$.

Наконец, на вопрос з) ответ да, поскольку $y(x) \to +\infty$ при $x \to e^{-e^{-a}} + 0$, т.е. в точке $x = e^{-e^{-a}}$ график функции $y(x)$ имеет вертикальную асимптоту.

23 Вступительный экзамен 2022 г.

Экзамен по математике проводился в форме онлайнового теста. Продолжительность экзамена составляла 3 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

23.1 Тест

23.1.1 Первая часть теста

1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда функция $f(x)$

A дважды дифференцируемая при $x = 0$

B принимает наименьшее значение при некотором $x \in \mathbf{R}$

C имеет локальный минимум при $x = 0$

D имеет локальный максимум при $x = -e^{-1/2}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Пусть $f(x) = e^{-e^{-x}}$ при $x \in \mathbf{R}$. Тогда функция $f(x)$

A убывает

B ограничена

C достигает наименьшего значения

D достигает наибольшего значения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^{3/2}+x+1}-\sqrt[3]{x^{3/2}-x+1}\right)$ равен

A 0

B $1/3$

C $2/3$

D 1

E числу, отличному от A, B, C, D, или не существует

4. Пусть $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} - 1$. Тогда

A ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

B ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ сходится

C ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n}{\ln n}$ сходится

D ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n^2}$ расходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Точная верхняя грань $\sup\limits_{x\in[-1,2]}\left(\lim\limits_{n\to\infty} n((x^2+1)^{1/n}-1)\right)$ равна

A e

B $\ln 5$

C 4

D $\sqrt{e}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

6. Пусть $y = y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = y \operatorname{tg} x$, $y(0) = 1$. Тогда

A функция $y(x)$ обращается в ноль в одной точке

B $y(\pi) = -1$

C функция $y(x)$ ограниченная

D функция $y(x)$ принимает наименьшее значение не менее, чем в двух точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} \right)^n.$$

Обозначим через M множество сходимости этого ряда. Тогда

A множество M открытое

B множество M замкнутое

C множество M ограничено сверху

D множество M ограничено снизу

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Задана функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0, \\ x \ln x, & x > 0. \end{cases}$$

Тогда

A функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой

B функция $f(x)$ имеет один локальный максимум

C функция $f(x)$ имеет два локальных минимума

D график функции $f(x)$ имеет вертикальную асимптоту

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Дана функция $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ и множество $M = \{(x, y) \colon y^2 - x^2 = 1\}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) являются истинными?

I. Функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наименьшего значения.

II. Точка $(0, 1)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

III. Множество значений функции $f(x, y)$ на множестве M ограничено сверху.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E ни один из вариантов, перечисленных в A, B, C, D, не дает правильного набора ответов

10. Пусть $y = y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \dfrac{y}{1+x^2}$, $y(0) = y_0$. Известно, что $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 2$. Тогда число y_0 равно

A $\pi/2$

B $2e^{-\pi/2}$

C $e^{\pi/2}$

D 2π

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

11. Функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$. Пусть $g(x) = \sup\limits_{y\in[x,b]} f(y)$ при $x \in [a, b]$. Найдите ***ложное*** утверждение.

A функция $g(x)$ монотонная

B если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$

C если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), то функция $g(x)$ дифференцируема на интервале (a, b)

D если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $[a, b]$, то функция $g(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $[a, b]$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

12. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[-1, 1]$, $f(0) = 0$ и $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)}{x} = a$, где a — вещественное число. Какие из утверждений ниже (I, II, III) истинные?

I. Функция $f(x)$ дифференцируема в нуле.

II. $a = 0$.

III. $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$.

A только III

B только II и III

C только I и II

D только I и III

E ни один из вариантов, перечисленных в A, B, C, D, не дает правильного набора ответов

13. Предел

$$\lim_{x\to 0+} x^{2x^2+3x-\ln(1+x^2)}$$

равен

A 0

B $1/2$

C 1

D $3/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

14. Дана функция $f(x,y) = x - 2y$ и множество $M = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 - 4xy = 4\}$. Тогда

A множество значений функции $f(x,y)$ на множестве M — отрезок

B функция $f(x,y)$ ограничена снизу на множестве M

C число локальных экстремумов функции $f(x,y)$ на множестве M четно

D точка $(2,0)$ является точкой локального максимума функции $f(x,y)$ на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. Для множества $M \subset \mathbf{R}$ обозначим через $l(M)$ множество его предельных точек. Пусть $A \subset \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}$. Тогда

A $l(A \cup B) = l(A) \cup l(B)$

B $l(A \cap B) = l(A) \cap l(B)$

C $l(A \setminus B) = l(A) \setminus l(B)$

D если множество M бесконечное, то $l(M) \neq \varnothing$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ задана соотношениями $x_1 = x \in \mathbf{R}$, $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n/3}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. При любом $x > 1/2$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ является невозрастающей последовательностью.

II. При любом $x < 1/4$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ является неубывающей последовательностью.

III. Существует такое число $x \in \mathbf{R}$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ расходится.

A только II

B только I, II

C только II, III

D только I, III

E ни один из вариантов, перечисленных в A, B, C, D, не дает правильного набора ответов.

17. Функция $y(x)$ определяется как неявная функция в окрестности точки (x_0, y_0) уравнением $(x + y)^3 = x^2 - 2xy + y^2$. Выберите ***ложное*** утверждение:

A $y(x)$ убывает в окрестности точки $(x_0, y_0) = (0, 1)$

B $y(x)$ убывает в окрестности точки $(x_0, y_0) = (1, 0)$

C $y(x)$ возрастает в окрестности точки $(x_0, y_0) = (1/27, 2/27)$

D $y(x)$ возрастает в окрестности точки $(x_0, y_0) = (2/27, 1/27)$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

18. Площадь фигуры между графиками функций $y = x/(x^2 + 1)$ и $y = kx$ в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, где k — параметр, равна $(1 + 1/e^2)/2$. Тогда параметр k равен

A e

B $1/e$

C e^2

D $1/e^2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

19. Интеграл
$$\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$
равен

A $\pi/3$

B $\pi/4$

C $\pi/6$

D $\pi/12$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

20. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-\sqrt{x^2-bx-1}\right)$ равен

A $\sqrt{ab}$

B $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$

C $a+b$

D $\dfrac{a+b}{2}$

E величине, отличной от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

21. Функциональная последовательность $f_n(x)=(1+x^n)^{1/n}$ при $n\to\infty$

A сходится равномерно на $[0,2]$

B сходится поточечно, но не равномерно на $[0,2]$

C расходится в некоторых точках отрезка $[0,1]$

D расходится в некоторых точках отрезка $[1,2]$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x^2+5x+2}$$

равен

A $\dfrac{\ln 3}{3}$

B $\dfrac{\ln 2}{2}$

C $\dfrac{\ln 2}{3}$

D $\dfrac{\ln 3}{2}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

23. Даны две системы векторов $X=\{x_1,\dots,x_m\}$, $Y=\{y_1,\dots,y_n\}$ в $\mathbf{R}^N$, где m, n, $N\geqslant 2$. Через $\langle Z\rangle$ обозначается линейная оболочка системы Z. Тогда

A $\quad$ если $\langle X\rangle \subset \langle Y\rangle$, то $m \leqslant n$

B $\quad$ если $\langle X\rangle \subset \langle Y\rangle$ и $m \leqslant n$, то система X линейно зависимая

C $\quad$ если система X линейно независимая и $\langle X\rangle \subset \langle Y\rangle$, то $m \leqslant n$

D $\quad$ если система X линейно зависимая и $\langle X\rangle \subset \langle Y\rangle$, то $m \leqslant n$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24. Пусть $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ — квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $a_{ii} \geqslant b_{ii} > 0$ при любом $i = 1, \ldots, n$. Через $\det X$ обозначается определитель матрицы X. Тогда

A $\quad$ $\det A \geqslant \det B$

B $\quad$ $\det(A - B) \geqslant 0$

C $\quad$ $\det A \leqslant \det B$

D $\quad$ $\det A \geqslant \det(A - B)$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Известно, что A задает оператор проектирования в $\mathbf{R}^n$, а B невырожденная. Тогда

A $\quad$ матрица BAB^{T} задает оператор проектирования в $\mathbf{R}^n$

B $\quad$ матрица BAB^{-1} задает оператор проектирования в $\mathbf{R}^n$

C $\quad$ матрица BAB задает оператор проектирования в $\mathbf{R}^n$

D $\quad$ матрица BAB^{T} не задает оператор проектирования в $\mathbf{R}^n$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

26. Даны множества

$A = \{x \in \mathbf{R}\colon x^2 - 3x < 0\}$,

$B = \{x \in \mathbf{R}\colon$ производная функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2022$ неотрицательная$\}$.

Тогда множество $A \setminus B$ есть

A $\quad$ $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

B $\quad$ $(0, 3)$

C $\quad$ $(0, 1)$

D $\quad$ $(1, 3)$

E $\quad$ подмножество вещественной оси, отличное от перечисленных в A, B, C, D

27. Интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2022} x}{\sin^{2022} x + \cos^{2022} x}\, dx$$

равен

- A π
- B $\pi/2$
- C $\pi/3$
- D $\pi/4$
- E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

28. Предел последовательности

$$\left\{ \sqrt{5}, \sqrt{5\sqrt{5}}, \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}, \ldots \right\}$$

равен

- A $\sqrt{5}$
- B 5
- C 5^2
- D 5^3
- E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

29. Сумма ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

равна

- A $1/4$
- B $1/3$
- C $2/3$
- D $3/4$
- E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

30. Известно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{nc} = 10.$$

Тогда число c равно

A $\ln(8/9)$

B $\ln(9/8)$

C $\ln(10/11)$

D $\ln(11/10)$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

31. Дана функциональная последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) являются истинными?

I. Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится при всех $x \in [0, 1]$.

II. Последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится при всех $x \in [0, 1]$.

III. Последовательность интегралов от функций $f_n(x)$ имеет предел, равный нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0.$$

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E ни один из вариантов, перечисленных в A, B, C, D, не дает правильного набора ответов

32. Пусть $y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши для дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y^2 - y}{x}$ с начальным условием $y(1) = 1/2$. Выберите ***ложное*** утверждение

A $y(0) = 1$

B $y(2) = 1/3$

C $y(3) = 1/4$

D график функции $y(x)$ имеет горизонтальную асимптоту

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

23.1.2 Вторая часть теста

1. Пусть A и B — матрицы размера $m \times n$, где $m, n \geqslant 2$. Известно, что $A^T A + B^T B = I$, где через X^T обозначается матрица, транспонированная к матрице X, а через I — единичная матрица. Тогда

а) $n \geqslant m$;

Да Нет

б) $n \leqslant 2m$;

Да Нет

в) $\operatorname{rank} A \geqslant n$ (здесь через $\operatorname{rank} X$ обозначается ранг матрицы X);

Да Нет

г) $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \geqslant n$;

Да Нет

д) блочная матрица

$$\begin{pmatrix} AA^T & AB^T \\ BA^T & BB^T \end{pmatrix}$$

размера $2m \times 2m$ задает оператор проектирования в пространстве $\mathbf{R}^{2m}$;

Да Нет

е) если $AB^T = 0$, то матрица AA^T задает оператор проектирования в пространстве $\mathbf{R}^m$;

Да Нет

ж) если матрица AA^T задает оператор проектирования в пространстве $\mathbf{R}^m$, то $AB^T = 0$;

Да Нет

з) если матрица BB^T задает оператор проектирования в пространстве $\mathbf{R}^m$, то $A^T B = 0$.

Да Нет

2. Функция $f(x)$ задана соотношениями:

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, & x < -1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{3n} + x^{2n}}, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{ax^3} - 1\right), & x > 1 \end{cases}$$

(a— вещественный параметр). Обозначим через M множество тех x, для которых указанные сумма и пределы существуют. По определению считаем, что M — область определения функции $f(x)$. Тогда а) множество M замкнуто;

Да Нет

б) множество M открыто;

Да Нет

в) на множестве $M \cap (-\infty, 0)$ функция $f(x)$ непрерывна при любом a;

Да Нет

г) существует такое число $a > 0$, что на множестве $M \cap (0, +\infty)$ функция $f(x)$ дифференцируемая;

Да Нет

д) существует такое число $a > 0$, что на множестве $M \cap (0, +\infty)$ функция $f(x)$ монотонная;

Да Нет

е) существует такое число $a > 0$, что уравнение $f(x) = -1/2$ имеет решение;

Да Нет

ж) при любом $a < 0$ уравнение $f(x) = -1/2$ имеет решение;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

3. Пусть $f(x, y) = \int_x^y (t-a)(t-b)(t-c)(t-d)dt$, где $a < b < c < d$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает своего наименьшего значения на $\mathbf{R}^2$;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ имеет 16 локальных экстремумов;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ имеет больше локальных минимумов, чем локальных максимумов;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ имеет локальный минимум в точке (a, b);

Да Нет

д) функция $f(x, y)$ имеет локальный максимум в точке (d, a);

Да Нет

е) функция $f(x, 2a - x)$ имеет локальный минимум при $x = a$;

Да Нет

ж) график функции $f(x, -x)$ имеет точку перегиба при $x = 0$;

Да Нет

з) функция $f(x, y)$ имеет локальный максимум в точке (c, c).

Да Нет

4. Дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}(n - ne^{x} + e^{x}).$$

Обозначим через M множество, состоящее из всех $x \in \mathbf{R}$, для которых этот ряд сходится, через $S_n(x)$ частичные суммы ряда, а через $S(x)$ сумму ряда для $x \in M$. Тогда

а) $M = \mathbf{R}$;

Да Нет

б) множество M замкнуто;

Да Нет

в) на отрезке $[0, 1]$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

г) найдется такое число $0 < \varepsilon < 1/2$, что на отрезке $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

д) на множестве $[1, +\infty)$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

е) функция $S(x)$ на множестве M имеет разрыв первого рода;

Да Нет

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{2022} S_n(x)\,dx = \int_1^{2022} S(x)\,dx$;

Да Нет

з) если $S(x_0) > 0$, где $x_0 \in M$, то $S(x) > 0$ при $x \in [x_0, x_0 + 1]$.

Да Нет

23.2 Ответы и решения теста

23.2.1 Ответы на вопросы первой части

1. B. **2.** B. **3.** C. **4.** B. **5.** B. **6.** E. **7.** B. **8.** B. **9.** B. **10.** B. **11.** C. **12.** D. **13.** C. **14.** C. **15.** A. **16.** E. **17.** E. **18.** D. **19.** D. **20.** D. **21.** A. **22.** C. **23.** C. **24.** E. **25.** B. **26.** D. **27.** D. **28.** B. **29.** D. **30.** C. **31.** C. **32.** A.

23.2.2 Решения задач второй части

Задача 1. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для них $A^TA + B^TB = I$, но $m > n$, так что ответ на вопрос а) — «нет» и ответ на вопрос в) — «нет».

Исследуем ранг матрицы $A^TA + B^TB$. Он не превосходит суммы рангов $\operatorname{rank}(A^TA) + \operatorname{rank}(B^TB)$, в то же время $\operatorname{rank}(X^TX) = \operatorname{rank} X$ для любой матрицы X, поэтому $\operatorname{rank}(A^TA) + \operatorname{rank}(B^TB) = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leqslant 2m$, так как ранг матрицы не превосходит числа ее строк. С другой стороны $A^TA + B^TB = I$, поэтому $\operatorname{rank}(A^TA + B^TB) = n$, откуда следует, что $n \leqslant 2m$ и ответ на вопрос б) — «да», а также ответ на вопрос г) — «да».

Возведем в квадрат блочную матрицу

$$\begin{pmatrix} AA^T & AB^T \\ BA^T & BB^T \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} AA^TAA^T + AB^TBA^T & AA^TAB^T + AB^TBB^T \\ BA^TAA^T + BB^TBA^T & BA^TAB^T + BB^TBB^T \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} A(A^TA + B^TB)A^T & A(A^TA + B^TB)B^T \\ B(A^TA + B^TB)A^T & B(A^TA + B^TB)B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^T & AB^T \\ BA^T & BB^T \end{pmatrix}.$$

Ответ на вопрос д) — «да».

Если $AB^T = 0$, то и $BA^T = (AB^T)^T = 0$, а значит возведение в квадрат блочной матрицы из вопроса д) превращается в

$$\begin{pmatrix} AA^T & 0 \\ 0 & BB^T \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (AA^T)^2 & 0 \\ 0 & (BB^T)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^T & 0 \\ 0 & BB^T \end{pmatrix},$$

откуда следует, что ответ на вопрос е) — «да».

Рассмотрим выражение $AA^T = A(A^TA + B^TB)A^T = (AA^T)^2 + (AB^T)(AB^T)^T$. Если матрица AA^T задает оператор проектирования, то $AA^T = (AA^T)^2$, а значит $(AB^T)(AB^T)^T = 0$. Так как $\operatorname{rank} XX^T = \operatorname{rank} X$ для любой матрицы X, то $\operatorname{rank}(AB^T) = 0$, ответ на вопрос ж) — «да».

Пример из вопросов а) и в) подходит в качестве контрпримера для вопроса з) — ответ «нет».

Задача 2. Найдем сумму ряда и пределы, задающие функцию $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < -1, \\ x^2, & -1 < x \leqslant 1, \\ ax^3, & x > 1. \end{cases}$$

При этом предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{3n} + x^{2n}}$ при $x = -1$ не существует. Таким образом, $M = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, ответ на вопрос а) — «нет», на вопрос б) — «да». График функции $f(x)$ представлен на рис. 27.

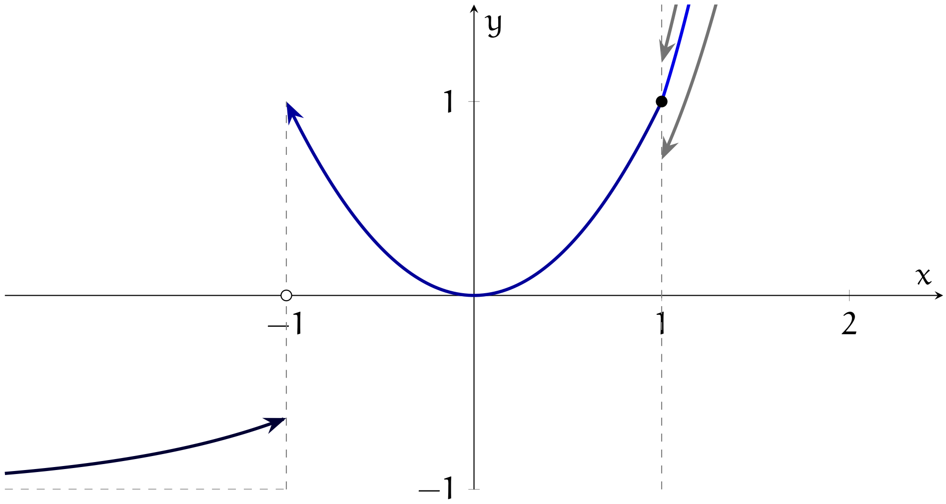


Рис. 27. График функции $f(x)$ (при $x > 1$ синяя линия соответствует $a = 1$, серые — $a = 0.7$ и $a = 1.2$)

Так как точка $x = 0$ не принадлежит M, то функция $f(x)$ непрерывна в любой точке $x \in M$, $x < 0$, ответ на вопрос в) — «да».

Заметим, что при $a \neq 1$ функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $x = 1$. При $a = 1$ функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 1$, но при этом левая производная $f'(1^-) = 2x\big|_{x=1} = 2$, а правая производная $f'(1^+) = 3x^2\big|_{x=1} = 3$, поэтому производная $f'(1)$ не существует. Ответ на вопрос г) — «нет». При этом можно заметить, что при $a \leqslant 1$ функция $f(x)$ строго возрастает на $M \cap (0, +\infty) = (0, +\infty)$, ответ на вопрос д) — «да». Также можно заметить, что при $a > 0$ уравнение $f(x) = -1/2$ не имеет решения. Действительно, $f(x) \geqslant 0$ при $x > -1$, и $f(x) < 1/e - 1 < 1/2$ при $x < -1$. Ответ на вопрос е) — «нет». Аналогично при $a < -1/2$, ответ на вопрос ж) — «нет».

Наконец, ответ на вопрос з) — «да», так как $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - 1) = -1$, что соответствует горизонтальной асимптоте.

Задача 3. Как можно заметить, подынтегральное выражение является многочленом четвертого порядка по t (со старшим коэффициентом, равным единице), поэтому первообразная является многочленом пятого порядка, а функция $f(x, y)$ является разностью двух многочленов пятого порядка по y и по x соответственно: $f(x, y) = g(y) - g(x)$. Поэтому $f(x,y)$ не достигает наименьшего и наибольшего значений, ответ на вопрос а) — «нет».

Дифференцируя интеграл $f(x,y)$ как функцию верхнего и нижнего предела, получаем производные

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -(x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (y-a)(y-b)(y-c)(y-d).$$

Приравнивая их нулю, находим 16 критических точек — всевозможные попарные комбинации $x = a, b, c, d$ и $y = a, b, c, d$. Матрица вторых производных диагональная:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -(x-b)(x-c)(x-d)- \\ \quad -(x-a)(x-c)(x-d)- \\ \quad -(x-a)(x-b)(x-d)- \\ \quad -(x-a)(x-b)(x-c) \end{array} & 0 \\ 0 & \begin{array}{l} (y-b)(y-c)(y-d)+ \\ \quad +(y-a)(y-c)(y-d)+ \\ \quad +(y-a)(y-b)(y-d)+ \\ \quad +(y-a)(y-b)(y-c) \end{array} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} < 0 \quad \text{при } x = b \text{ или } x = d,$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} > 0 \quad \text{при } x = a \text{ или } x = c,$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} < 0 \quad \text{при } y = a \text{ или } y = c,$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} > 0 \quad \text{при } y = b \text{ или } y = d,$$

откуда делаем вывод о том, что у функции $f(x,y)$ четыре локальных максимума — (b,a), (b,c), (d,a), (d,c) и четыре локальных минимума — (a,b), (a,d), (c,b), (c,d). Остальные восемь критических точек не являются точками экстремума. Ответы на вопросы б) — «нет», в) — «нет», г) — «да», д) — «да», з) — «нет».

Рассмотрим функцию $h(x) = f(x, 2a-x)$, ее производная равна

$$h'(x) = -(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) - (2a-x-a)(2a-x-b)(2a-x-c)(2a-x-d),$$

она равна нулю при $x = a$. Вторая производная равна

$$\begin{aligned} h''(x) = &-(x-b)(x-c)(x-d)-(x-a)(x-c)(x-d)-(x-a)(x-b)(x-d)-(x-a)(x-b)(x-c)+ \\ &+ (2a-x-b)(2a-x-c)(2a-x-d) + (2a-x-a)(2a-x-c)(2a-x-d)+ \\ &+ (2a-x-a)(2a-x-b)(2a-x-d) + (2a-x-a)(2a-x-b)(2a-x-c), \end{aligned}$$

она тоже равна нулю в точке $x = a$. Наконец, третья производная равна

$$h'''(x) = -2(x-a)(x-b) - 2(x-a)(x-c) - 2(x-a)(x-d) - 2(x-b)(x-c) - \\ - 2(x-b)(x-d) - 2(x-c)(x-d) - 2(2a-x-a)(2a-x-b) - \\ - 2(2a-x-a)(2a-x-c) - 2(2a-x-a)(2a-x-d) - \\ - 2(2a-x-b)(2a-x-c) - 2(2a-x-b)(2a-x-d) - 2(2a-x-c)(2a-x-d),$$

она отрицательная в точке $x = a$, поэтому эта точка не является точкой экстремума функции $h(x)$, ответ на вопрос е) — «нет».

Аналогично, рассмотрим функцию $h(x) = f(x, -x)$, ее производная равна

$$h'(x) = -(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) - (x+a)(x+b)(x+c)(x+d),$$

вторая производная равна

$$h''(x) = -(x-b)(x-c)(x-d) - (x-a)(x-c)(x-d) - (x-a)(x-b)(x-d) - (x-a)(x-b)(x-c) - \\ - (x+b)(x+c)(x+d) - (x+a)(x+c)(x+d) - (x+a)(x+b)(x+d) - (x+a)(x+b)(x+c),$$

она равна нулю при $x = 0$, значит это точка перегиба, ответ на вопрос ж) — «да».

Задача 4. Перепишем выражение общего члена ряда: $xe^{-nx}(n - ne^x + e^x) = xe^{-nx}(n - (n-1)e^x) = x(ne^{-nx} - (n-1)e^{-(n-1)x})$. Отсюда следует, что частичная сумма $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x(ke^{-kx} - (k-1)e^{-(k-1)x} = xne^{-nx}$. Предел частичных сумм конечен (и тождественно равен нулю) при $x \geqslant 0$, поэтому $M = [0, +\infty)$ и ответ на вопрос а) — «нет», ответ на вопрос б) — «да».

Максимум функции $S_n(x) = xne^{-nx}$ на отрезке $[0, 1]$ достигается в точке $x = 1/n$ и равен $1/e \not\to 0$, поэтому ответ на вопрос в) — «нет». В то же время при любом $0 < \varepsilon < 1/2$ при $n > 1/\varepsilon$ максимум функции $s_n(x)$ на отрезке $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ достигается в точке $x = \varepsilon$ и равен $\varepsilon ne^{-n\varepsilon} \to 0$, поэтому ответ на вопрос г) — «да». Аналогично для интервала $[1, +\infty)$: максимум частичной суммы достигается в точке $x = 1$ и равен $ne^{-n} \to 0$, поэтому ответ на вопрос д) — «да».

Функция $S(x)$ тождественно равна нулю и непрерывна, поэтому ответ на вопрос е) — «нет».

Так как последовательность частичных сумм $S_n(x)$ сходится к $S(x)$ равномерно на $[1, 2022]$, то последовательность интегралов от $S_n(x)$ также сходится к интегралу от $S(x)$, ответ на вопрос ж) — «да».

В вопросе з) содержится ложная посылка, так как $S(x_0) = 0$ при любом x_0. Ответ на вопрос з) — «да».

24 Вступительный экзамен 2023 г.

Экзамен по математике проводился в форме онлайнового теста. Продолжительность экзамена составляла 3 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «-0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «-1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

24.1 Тест

24.1.1 Первая часть теста

1. Пусть $S(t)$ — площадь фигуры, заданной пересечением кривых $y = x^t$, $y = x^{1/t}$, $t > 0$. Тогда предел $\lim\limits_{t\to 1+} \dfrac{S(t)}{t-1}$ равен

A	0
B	1/2
C	1
D	3/2
E	числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

2. Числа a и b таковы, что

$$\begin{cases} b - 2a = 1, \\ 3a - b = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Тогда величина $\log_a(b)$ равна

A $\quad 1$

B $\quad \sqrt{2}$

C $\quad 2$

D $\quad \log_2(3)$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

3. Функция $f(x)$ при всех $x \in \mathbf{R}$ имеет производную $f'(x)$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. $f(x) = \dfrac{f(0) + f(1)}{2}$ при некотором $x \in \mathbf{R}$.

II. $f'(x) = f(1) - f(0)$ при некотором $x \in \mathbf{R}$.

III. $f'(x) = \dfrac{f'(0) + f'(1)}{2}$ при некотором $x \in \mathbf{R}$.

A $\quad$ только I

B $\quad$ только II

C $\quad$ II и III

D $\quad$ I, II и III

E $\quad$ ни одно из утверждений I, II, III не является верным

4. Дана функция $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$ и множество $M = \{(x, y) \colon x^2 + xy = 0\}$. Тогда

A $\quad$ функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наибольшего и наименьшего значений

B $\quad$ точка $(0, 1)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M

C $\quad$ точка $(1, -1)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M

D $\quad$ для любой точки $(x, y) \in M$ выполняется неравенство $f(x, y) \geqslant 11/10$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Дана функция
$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если число } x \text{ рациональное,} \\ 0, & \text{если число } x \text{ иррациональное} \end{cases}$$
($D(x)$ — функция Дирихле). Пусть $M = \{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1, |y| \leqslant D(x)\}$. Тогда замыкание множества M — это

A M

B $\{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1, y = -1\} \cup \{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1, y = 1\}$

C $\{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1, y = -1\} \cup \{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1, y = 1\} \cup \{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1, y = 0\}$

D $\{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$

E множество, отличное от перечисленных в A, B, C, D

6. Функция $f(x)$, определенная и непрерывная на всей вещественной оси, удовлетворяет равенству
$$f(5 - x) = \frac{f(x) - x^2}{2}.$$
Тогда значение $f(4)$ равно

A 3

B -4

C 5

D -6

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

7. Касательная к кривой $x^2/3 - y^2 = 1$, проведенная в точке $(3, \sqrt{2})$, пересекает ось ординат в точке

A $y = -\sqrt{3}/2$

B $y = \sqrt{3}/2$

C $y = -\sqrt{2}/2$

D $y = \sqrt{2}/2$

E в точке, отличной от перечисленных в A, B, C, D, либо точка пересечения отсутствует

8. Функция $f(x)$ определена как
$$f(x) = \int_0^{x^2} t\sqrt{1 + t^2}\, dt.$$
Тогда вторая производная $f''(x)$ при $x = 0$ равна

A 0

B $1/3$

C $1/2$

D $2/3$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

9. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1/n}{n-1/n}\right)^{n^2}$ равен

A 1

B $\sqrt{e}$

C e

D e^2

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

10. Дана функция $f(x) = xe^{-|x-1|}$. Тогда

A наибольшее значение функции $f(x)$ равно $2/e$, наименьшего значения не существует

B наименьшее значение функции $f(x)$ равно $-2/e^3$, наибольшего значения не существует

C наименьшее значение функции $f(x)$ равно $-1/e^2$, наибольшее значение равно 1

D функция $f(x)$ не достигает ни наибольшего, ни наименьшего значений

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$ равен

A e

B $-e$

C $e/2$

D $-e/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

12. Интеграл $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x\,dx}{(1+\ln x)^2}$ равен

A $\ln 2$

B $\dfrac{\ln 2}{2}$

C $\ln\left(1+\dfrac{e^2}{2}\right)$

D $\dfrac{\ln(1+e^2)}{2}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

13. Интеграл

$$\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

равен

A $1/3$

B $1/2$

C $2/3$

D $3/4$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

14. Интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$$

равен

A $(2/3)\ln(3/2)$

B $(1/4)\ln(2/3)$

C $(2/5)\ln(3/2)$

D $(1/2)\ln(2/3)$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

15. Интеграл $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+e^x}$ равен

A 1

B $1-\ln\left(1+e^{-1}\right)$

C $2-\ln(1+e)$

D $\ln(1+e)-1$

E величине, отличной от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

16. Пусть $y = y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = y \operatorname{tg} x$, $y(0) = 1$. Тогда значение $y(\pi)$ равно

- A 1
- B -1
- C $\pi/4$
- D $-\pi/4$
- E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не определено

17. Пусть $y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$y' = y^2 + 1, \quad y(0) = 1.$$

Выберите *ложное* утверждение:

- A $y(1/2) > 0$
- B $y(-1/2) > 0$
- C $y(1) < 0$
- D $y(-1) < 0$
- E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

18. Сумма ряда $1 - x - x^2 + x^3 + x^4 - x^5 - x^6 + \ldots$ при $x \in (-1, 1)$ равна

- A $\dfrac{1-x}{1+x^2}$
- B $\dfrac{1+x}{1+x^2}$
- C $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$
- D выражению, отличному от перечисленных в A, B, C
- E ряд расходится на $(-1, 1)$

19. Пусть M — непустое подмножество числовой прямой $\mathbf{R}$, не совпадающее с $\mathbf{R}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. Множество граничных точек множества M не пусто.

II. Любая предельная точка множества M является его граничной точкой.

III. Любая граничная точка множества M является его предельной точкой.

- A только I

B	только I и II

C	только I и III

D	I, II, III

E	ни один из вариантов, перечисленных в A, B, C, D не дает правильного набора ответов

20. Множество значений последовательности $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ имеет ровно две предельные точки. Тогда

A	последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится

B	последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ расходится

C	последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ ограниченная

D	последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ неограниченная

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Даны векторы

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Размерность линейной оболочки $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ этих векторов равна

A	1

B	2

C	3

D	4

E	5

22. Симметричная матрица A задает квадратичную форму

$$x^T A x = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 14x_2x_3 + x_3^2,$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbf{R}^3$. Тогда

A	матрица A положительно определена, $\det A = 43$

B	матрица A отрицательно определена, $\det A = -43$

C	матрица A знакопеременная, $\det A = 43$

D	матрица A знакопеременная, $\det A = -43$

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

След (сумма диагональных матричных элементов) матрицы A^{-1}, обратной к матрице A, равен

A	8

B	-9

C	9

D	4

E	числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или матрица A^{-1} не существует

24. Известно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{nc} = 5.$$

Тогда число c равно

A	$\log_2(3/4)$

B	$\log_2(4/5)$

C	$\log_2(5/6)$

D	$\log_2(6/7)$

E	числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

25. Пусть $k > 2$. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ задается формулами $x_1 = \sqrt{k}$, $x_{n+1} = \sqrt{k - x_n}$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда

A	последовательность x_n сходится и ее предел равен $(4k+1)/2$

B	последовательность x_n сходится и ее предел равен $(4k-1)/2$

C	последовательность x_n сходится и ее предел равен $(\sqrt{4k+1}+1)/2$

D	последовательность x_n сходится и ее предел равен $(\sqrt{4k+1}-1)/2$

E	последовательность x_n либо сходится и имеет другой предел, либо расходится

26. У непустого множества $M \subset \mathbf{R}$ нет внутренних точек. Тогда

A множество M замкнуто

B множество M имеет изолированные точки

C все точки множества M граничные

D множество M имеет внешние точки

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

27. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}e^{-nx}$. Обозначим через M множество его сходимости, и для $x \in M$ обозначим $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}e^{-nx}$. Тогда

A множество M замкнуто

B функция $S(x)$ непрерывна на M

C функция $S(x)$ ограничена на M

D на любом интервале $(a, b) \subset M$ ряд сходится равномерно

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

28. Уравнение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n!} = -x^2 - 1$

A имеет единственное решение, лежащее в интервале $(-1/2, 0)$

B имеет единственное решение, лежащее в интервале $(-1, -1/2)$

C имеет единственное решение, лежащее в интервале $(-3/2, -1)$

D не имеет решений

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

29. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 2x)}{(2^x - 1)((x+1)^3 - (x-1)^3)}$ равен

A $-3/\ln 2$

B $-\ln 2/3$

C $-\ln 2$

D -3

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

30. Интеграл $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$ равен

A $\pi^2 - 4$

B $2\pi - 3$

C $3\pi^2/4 - 3$

D $3\pi - 6$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

31. Производная функции $(\sin x)^{\sin x}$ в точке $x = \pi/2$ равна

A 0

B $1/2$

C 1

D $\pi/4$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

32. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Обозначим $M = \{x \colon f'(x) = 0\}$. Тогда

A каждая точка множества M изолированная

B каждая точка множества M является точкой локального экстремума функции $f(x)$

C множество M компактное

D множество M неограниченное

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24.1.2 Вторая часть теста

1. Дана функция $f(x, y) = (x-1)^2 + y^2$ и множество $M = \{(x, y) \colon x^3 + x = y^2\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наибольшего значения и не достигает наименьшего значения;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наименьшего значения и не достигает наибольшего значения;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ на множестве M имеет ровно три локальных экстремума;

Да Нет

г) точка $\left(1/2, \sqrt{5/8}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

д) для любой точки $(x, y) \in M$ выполнено неравенство $f(x, y) \geqslant 0.85$;

Да Нет

е) точка $(0, 0)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

ж) точка $\left(1/3, \sqrt{10/27}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) число локальных максимумов функции $f(x, y)$ на множестве M четно.

Да Нет

2. Подпространства $L_1, L_2 \subset \mathbf{R}^5$ определяются как множества решений систем линейных уравнений:

$$L_1\colon \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \end{cases} \qquad L_2\colon \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 5x_4 - \alpha x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \end{cases}$$

где α — вещественный параметр. Тогда

а) $\dim L_1 = 4$;

Да Нет

б) $\dim L_2 = 3$ при всех $\alpha \in \mathbf{R}$;

Да Нет

в) пространства L_1 и L_2 ортогональны друг другу при стандартном скалярном произведении;

Да Нет

г) $\dim(L_1 \cap L_2) \geqslant 3$ при всех $\alpha \in \mathbf{R}$;

Да Нет

д) множество $L_1 \cup L_2$ является подпространством в $\mathbf{R}^5$ при всех $\alpha \in \mathbf{R}$;

Да Нет

е) существует $\alpha \in \mathbf{R}$ такое, что множество $L_1 \cup L_2$ является подпространством в $\mathbf{R}^5$;

Да Нет

ж) существует $\alpha \in \mathbf{R}$ такое, что $\dim(L_1 + L_2) \geqslant 4$;

Да Нет

з) существует $\alpha \in \mathbf{R}$ такое, что $\dim(L_1 + L_2) \leqslant 3$.

Да Нет

3. Пусть $y = y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \dfrac{y^2 - y}{x}$, $y(1) = a$, где $a \in \mathbf{R}$ — параметр. Обозначим через D область определения функции $y = y(x)$. Тогда

а) при любом a множество D неограниченное;

Да Нет

б) при $a = 2$ функция $y(x)$ строго возрастает;

Да Нет

в) при любом a функция $y(x)$ строго монотонная (строго возрастает или строго убывает);

Да Нет

г) при $a = -1/2$ выполняется равенство $\lim\limits_{x \to 0+} y(x) = 1$;

Да Нет

д) при $a = -1/2$ выполняется равенство $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$;

Да Нет

е) при $a = 1/2$ график функции $y(x)$ пересекает ось Ox в единственной точке;

Да Нет

ж) при $a = 2$ уравнение $y(x) = c$ имеет решение для любого $c > 0$;

Да Нет

з) при любом $a \leqslant 0$ график функции $y(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

4. Дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^n}{n^5 \cdot 5^n} (x^2 - 2x - 3)^{2n}.$$

Обозначим через M множество, состоящее из всех $x \in \mathbf{R}$, для которых этот ряд сходится, а через $f(x)$ сумму этого ряда для $x \in M$. Также через $F(x)$ обозначим функцию, совпадающую с $f(x)$ на множестве M и равную нулю на множестве $\mathbf{R} \setminus M$. Тогда

а) множество M ограниченное;

Да Нет

б) множество M открытое;

Да Нет

в) множество M имеет предельные точки;

Да Нет

г) на отрезке $[-2/5, 2/5]$ данный ряд сходится равномерно;

Да Нет

д) функция $F(x)$ на M достигает наименьшего значения;

Да Нет

е) график функции $F(x)$ имеет асимптоту;

Да Нет

ж) функция $F(x)$ дифференцируема на $\mathbf{R}$;

Да Нет

з) $F(1) = \dfrac{1}{1 - 1/16}$.

Да Нет

24.2 Ответы и решения теста

24.2.1 Ответы на вопросы первой части

1. B. **2.** C. **3.** D. **4.** B. **5.** D. **6.** D. **7.** C. **8.** A. **9.** D. **10.** C. **11.** D. **12.** E. **13.** C. **14.** C. **15.** A. **16.** E. **17.** C. **18.** A. **19.** A. **20.** B. **21.** C. **22.** D. **23.** B. **24.** C. **25.** D. **26.** C. **27.** B. **28.** D. **29.** E. **30.** A. **31.** A. **32.** C.

24.2.2 Решения задач второй части

Задача 1. Выразим $y^2 = x^3 + x$ из определения множества M и подставим в функцию $f(x, y)$. Получим функцию $g(x) = (x-1)^2 + x^3 + x = x^3 + x^2 - x + 1$. Так как $y^2 \geqslant 0$, то для нахождения экстремумов функции $f(x, y)$ на множестве M достаточно исследовать функцию $g(x)$ на множестве $N = \{x\colon x^3 + x \geqslant 0\} = \{x\colon x \geqslant 0\}$.

Заметим, что при $x \to +\infty$ функция $g(x) \to +\infty$, поэтому она не достигает на N наибольшего значения. Кроме того, существует $X > 0$ такой, что $g(x) > 1$ при любом $x > X$. И так как $g(0) = 1$ и $g(x)$ непрерывна, то наименьшее значение $g(x)$ на множестве N достигается и принадлежит отрезку $[0, X]$ (на самом отрезке оно достигается по теореме Вейерштрасса, также оно не превосходит $g(0) = 1$, а вне отрезка $[0, X]$ все значения больше единицы). Возвращаясь к функции $f(x, y)$, делаем вывод, что она достигает наименьшего значения и не достигает наибольшего значения на M (ответы на вопросы а) — «нет», б) — «да»).

Производная функции $g(x)$ равна $g'(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Решив уравнение $g'(x) = 0$, получим точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1/3$, из которых только точка $x_2 \in N$. Вторая производная $g''(x) = 6x + 2$, ее значение в точке x_2 равно $g''(x_2) = 6/3 + 2 > 0$, соответственно точка $x = 1/3$ является точкой локального минимума функции $g(x)$ на множестве N, а значит точки $\left(1/3, \pm\sqrt{1/3^3 + 1/3}\right) = \left(1/3, \pm\sqrt{10/27}\right)$ являются точками локального минимума функции $f(x, y)$ на M. Значение функции $f(x, y)$ в обеих точках равно $(1/3-1)^2+10/27 = 22/27 < 0.85$.

Рассмотрим крайнюю точку множества N — точку $x = 0$. В ней значение производной $g'(0) = 3\cdot 0^2 + 2\cdot 0 - 1 = -1 < 0$, соответственно это точка локального максимума функции $g(x)$ на N. Значит точка $(0, 0)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на M.

Таким образом, функция $f(x, y)$ имеет три локальных экстремума на M, при этом так как она достигает наименьшего значения на M, то точки $\left(1/3, \pm\sqrt{10/27}\right)$ и являются точками глобального минимума.

Ответы на вопросы: в) — «да», г) — «нет», д) — «нет», е) — «да», ж) — «да», з) — «нет».

Задача 2. Представим системы уравнений, определяющие подпространства L_1 и L_2, в матричном виде: пусть $x \in \mathbf{R}^5$, тогда

$$L_1\colon A_1 x = 0, \text{ где } A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 6 & -3 \\ 1 & 6 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_2\colon A_2 x = 0, \text{ где } A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 5 & -\alpha \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего следует отметить, что ранги матриц A_1 и A_2 равны двум. Действительно, очевидным образом отличны от нуля миноры этих матриц, состоящие из первых двух столбцов. Это означает, что размерности обоих пространств равны $\dim L_1 = \dim L_2 =$

$= \dim \mathbf{R}^5 - \operatorname{rank} A_i = 5 - 2 = 3$. Таким образом, ответ на вопрос а) — «нет», а на вопрос б) — «да».

Далее, легко видеть, что если $\alpha = 1$, то первая и вторая строки матрицы A_1 равны соответственно сумме и разности строк матрицы A_2. Это означает, что при $\alpha = 1$ строки матрицы A_2 равны соответственно полусумме и полуразности строк матрицы A_1 (отметим, что вторая строка матрицы A_2 равна полуразности строк матрицы A_1 при любом α). По этой причине множества решений обеих систем совпадают. Таким образом, при $\alpha = 1$ пространства L_1 и L_2 совпадают, $L_1 = L_2$.

Пересечение $L_1 \cap L_2$ подпространств L_1 и L_2 определяется как множество решений системы уравнений, содержащей все уравнения, определяющие эти подпространства. Другими словами, подпространство $L_1 \cap L_2$ определяется как множество решений системы линейных уравнений с матрицей B, которая является «объединением» матриц A_1 и A_2:

$$L_1 \cap L_2\colon Bx = 0, \quad \text{где} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 6 & -3 \\ 1 & 6 & -3 & 4 & 1 \\ & & & & \\ 3 & 5 & -1 & 5 & -\alpha \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

При $\alpha = 1$ ранг матрицы B равен 2, поскольку третья и четвертая ее строки равны некоторым линейным комбинациям первых двух строк, поэтому размерность пересечения $L_1 \cap L_2$ равна $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 = \dim L_2 = \dim \mathbf{R}^5 - \operatorname{rank} B = 5 - 2 = 3$.

Если же $\alpha \neq 1$, то ранг матрицы B равен 3, поскольку три из четырех строк матрицы B линейно независимы. По этой причине размерность пересечения $L_1 \cap L_2$ равна $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim \mathbf{R}^5 - \operatorname{rank} B = 5 - 3 = 2$.

Теперь легко ответить на остальные вопросы задачи.

Если пространства L_1 и L_2 ортогональны друг другу при стандартном скалярном произведении, то скалярное произведение произвольного вектора из L_1 и произвольного вектора из L_2 должно быть равно нулю. Поскольку размерность пересечения подпространств L_1 и L_2 больше нуля, $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 = \dim L_2 = 3 \neq 0$ при $\alpha = 1$ и $\dim(L_1 \cap L_2) = 2 \neq 0$ при $\alpha \neq 1$, то это пересечение содержит также ненулевые векторы. В таком случае подпространства L_1 и L_2 не могут быть ортогональными друг другу: если мы возьмем произвольный ненулевой вектор v, который принадлежит пересечению подпространств L_1 и L_2, $v \in L_1 \cap L_2$, то скалярное произведение этого вектора на самого себя (взятого первым сомножителем в скалярном произведении в качестве вектора из L_1, и взятого вторым сомножителем в скалярном произведении в качестве вектора из L_2) будет строго положительным, т. е. отличным от нуля. Поскольку существуют неортогональные друг другу векторы из L_1 и L_2, то эти подпространства не могут быть ортогональными друг другу. Таким образом, ответ на вопрос в) — «нет».

Поскольку если $\alpha \neq 1$, то $\dim(L_1 \cap L_2) = 2 < 3$, получаем, что ответ на вопрос г) — также «нет».

Объединение $L_1 \cup L_2$ подпространств L_1 и L_2 как подмножеств пространства $\mathbf{R}^5$, вообще говоря, не является линейным пространством. Например, при $\alpha \neq 1$ ни одно из подпространств L_1 или L_2 не содержится целиком в другом подпространстве. Поэтому линейные комбинации векторов из L_1 и L_2 могут не принадлежать объединению подпространств. В этом можно убедиться, рассмотрев случай $\alpha = 2$ и векторы $v_1 = (0,0,9,4,11)^T \in L_1$ и $v_2 = (0,0,8,6,11)^T \in L_2$. Поскольку, как легко убедиться, их разность $v = v_1 - v_2 = (0,0,1,-2,0)$ не удовлетворяет ни одной из двух систем, $A_1 v \neq 0$ и $A_2 v \neq 0$, то вектор v не принадлежит ни L_1, ни L_2. Соответственно объединение $L_1 \cup L_2$ подпространств L_1 и L_2 не является в этом случае линейным пространством и соответственно подпространством в $\mathbf{R}^5$.

В то же время при $\alpha = 1$ подпространства L_1 и L_2 совпадают, поэтому $L_1 \cup L_2 = L_1 = L_2$, т. е. $L_1 \cup L_2$ является линейным пространством. Соответственно ответ на вопрос д) – «нет», ответ на вопрос е) – «да» (в данном случае подходящими значениями параметра α являются произвольное $\alpha \neq 1$ для пункта ж) и $\alpha = 1$ для пункта з)).

Наконец, рассмотрим размерность суммы $L_1 + L_2$ подпространств L_1 и L_2. Как известно, выполнено равенство $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$. Поскольку $\dim L_1 = \dim L_2 = 3$, а $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 = \dim L_2 = 3$ при $\alpha = 1$ и $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$ при $\alpha \neq 1$, то мы можем заключить, что $\dim(L_1 + L_2) = 3$ при $\alpha = 1$ и $\dim(L_1 + L_2) = 4$ при $\alpha \neq 1$. Таким образом, на вопросы ж) и з) ответы «да».

Задача 3. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. решим его почленным интегрированием:

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Возьмем неопределенный интеграл

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = \int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dy}{y-1} - \int \frac{dy}{y} = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| + C,$$

откуда получим неявное выражение для общего решения:

$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = Cx.$$

Подставив начальное условие, имеем

$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = \left|\frac{a-1}{a}\right| x.$$

Так как правая часть исходного уравнения не определена при $x = 0$, то любое решение продолжается не далее, чем на множество $x > 0$. Отдельно следует рассмотреть постоянные решения $y(x) \equiv 0$ и $y(x) \equiv 1$ при $x > 0$ (соответствуют $a = 0$ и $a = 1$).

Рассмотрим три случая для начального условия:

$a > 1$: В этом случае модули раскрываются в

$$\frac{y-1}{y} = \frac{a-1}{a} x,$$

откуда получаем явное решение

$$y(x) = \frac{1}{1 - \frac{a-1}{a}x},$$

определенное и строго возрастающее на интервале $D = (0, a/(a-1))$. При $x \to$ $\to a/(a-1)-$ решение $y(x) \to +\infty$.

$0 < a < 1$: В этом случае модули раскрываются в

$$\frac{1-y}{y} = \frac{1-a}{a}x,$$

откуда получаем явное решение

$$y(x) = \frac{1}{1 + \frac{1-a}{a}x},$$

определенное и строго убывающее на интервале $D = (0, +\infty)$. При $x \to 0+$ решение $y(x) \to 1$, при $x \to +\infty$ решение $y(x) \to 0$.

$a < 0$: В этом случае, так же как и в случае $a > 1$, модули раскрываются в

$$\frac{y-1}{y} = \frac{a-1}{a}x,$$

откуда получаем явное решение

$$y(x) = \frac{1}{1 - \frac{a-1}{a}x},$$

определенное и строго возрастающее на интервале $D = (a/(a-1), +\infty)$. При $x \to$ $\to a/(a-1)+$ решение $y(x) \to -\infty$.

Примеры графиков решений приведены на рисунке 28.

Таким образом, при $a > 1$ множество D ограниченное (вопрос а) — «нет»). При $a =$ $= 2 > 1$ функция $y(x)$ строго возрастающая (вопрос б) — «да») и строго больше единицы (ответ на вопрос ж) — «нет»). При $a = 0$ или $a = 1$ функция $y(x)$ постоянная (вопрос в) — «нет»). Из сказанного выше следует, что ответы на вопросы г) — «нет» (при $a = -1/2$ решение не продолжается до точки $x = 0$), д) — «да». Так как график функции $y(x)$ не пересекает ось Ox при любом $a \neq 0$, то ответ на вопрос е) — «нет». При любом $a \in \mathbf{R}$ график функции $y(x)$ имеет асимптоту, так что ответ на вопрос з) — «да».

Задача 4. Прежде всего заметим, что данный ряд представляет собой степенной ряд по аргументу $y = (x^2 - 2x - 3)^2$. Радиус сходимости R степенного ряда с коэффициентами a_n может быть найден по формуле Коши:

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n},$$

где символ $\varlimsup\limits_{n\to\infty}$ обозначает верхний предел при $n \to \infty$. В нашем случае

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \left(\frac{3^n \cdot n^n}{n^5 \cdot 5^n}\right)^{1/n} = \varlimsup_{n\to\infty} \left(\frac{3 \cdot n}{n^{5/n} \cdot 5}\right) = \varlimsup_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5} \cdot n^{1-5/n}\right).$$

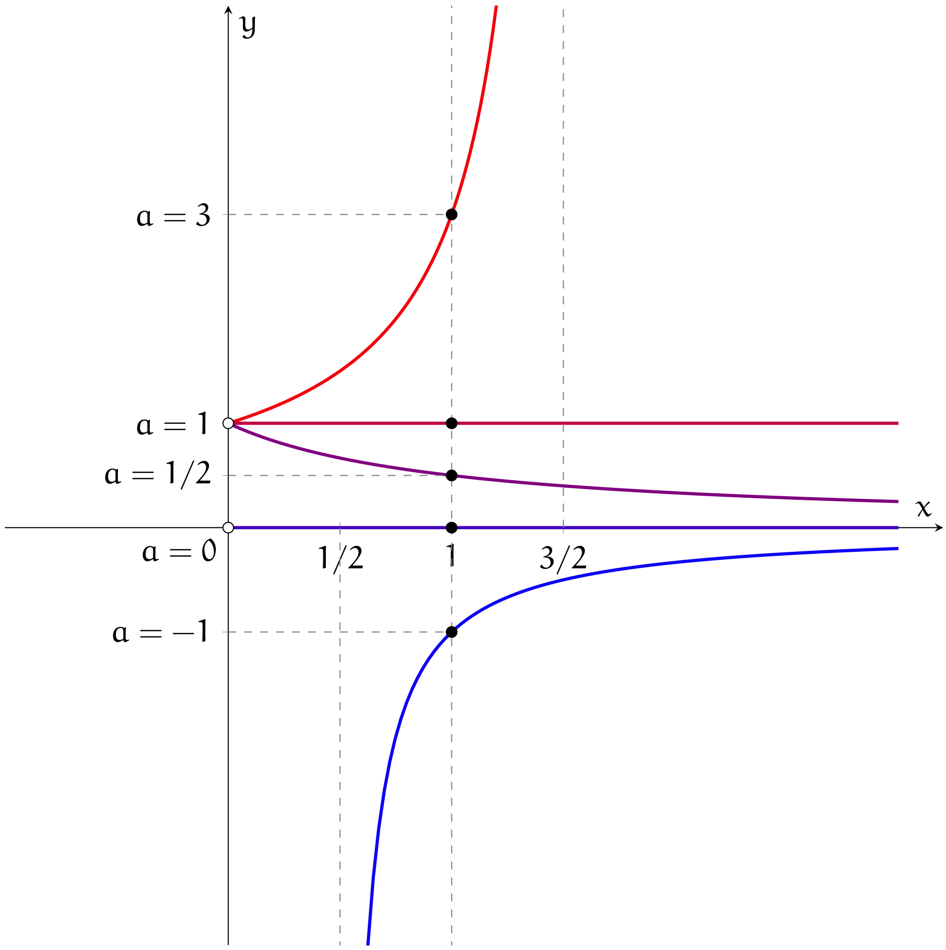


Рис. 28. Графики решений дифференциального уравнения при разных начальных условиях

Поскольку $1-5/n>0$, выражение под знаком предела неограниченно растет при увеличении n, тем самым этот предел не существует. Это означает, что радиус сходимости этого степенного ряда равен нулю, и этот ряд сходится только при тех значениях переменной x, при которых $y=(x^2-2x-3)^2=((x-3)(x+1))^2=0$. Другими словами, этот ряд сходится только при $x=-1$ и при $x=3$.

Теперь легко ответить на все вопросы задачи.

Множество M, на котором ряд сходится, состоит из двух точек: $x=-1$ и $x=3$. Оно ограничено (ответ на вопрос а) — «да»), замкнуто (ответ на вопрос б) – «нет») и не имеет предельных точек (ответ на вопрос в) – «нет»).

Поскольку отрезок $[-2/5, 2/5]$ не содержится во множестве M, то на отрезке $[-2/5, 2/5]$ ряд расходится и тем самым не является равномерно сходящимся (ответ на вопрос г) — «нет»).

Поскольку ряд сходится только в двух точках $x=-1$ и $x=3$, в которых каждый член ряда равен нулю, то сумма ряда в этих точках (а значит, и функция $f(x)$, определенная только в этих двух точках) равна нулю. Функция $F(x)$, равная функции $f(x)$ на множестве M и нулю вне множества M, тождественно равна нулю на всей числовой прямой. Соответственно она достигает на $\mathbf{R}$ наименьшего значения (ответ на вопрос д) — «да»), ее график имеет асимптоту — ось Ox (ответ на вопрос е) — «да»), она дифференцируема на $\mathbf{R}$ (ответ на вопрос ж) — «да»), а при $x = 1$ функция $F(x)$ принимает нулевое значение, а не число $1/(1 - 1/16)$ (ответ на вопрос з) — «нет»).

25 Вступительный экзамен 2024 г.

Экзамен по математике проводился в форме онлайнового теста. Продолжительность экзамена составляла 3 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

25.1 Тест

25.1.1 Первая часть теста

1. Определенный интеграл

$$\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

равен

A	1/10
B	9/10
C	15/10
D	21/10

E не существует

2. Неопределенный интеграл
$$\int \frac{x^3dx}{x^8+2}$$
равен

A $\frac{1}{8}\ln(x^8+2)+C$

B $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C$

C $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C$

D $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{2}}+C$

E $\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{2}}+C$

3. Определенный интеграл
$$\int_0^1 xe^{-x}dx$$
равен

A $1-2/e$

B $1-1/e$

C $1+1/e$

D $1+2/e$

E другому числу, отличному от указанных в A, B, C, D

4. Пусть $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$. Найдите *ложное* утверждение.

A функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[2,10]$

B $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

C уравнение $f(x)=8$ имеет два корня

D $f(x)<x$ при $x>2$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

5. Задана функция $f(x)=\min\{x^2-5x+5, x\}$. Тогда

A у функции $f(x)$ три точки локальных экстремумов

B на отрезке $[2,4]$ функция $f(x)$ вогнутая

C на отрезке $[3,6]$ функция $f(x)$ возрастает

D наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[0,4]$ больше $3/2$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Пусть $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^4}$. Тогда

A график функции $f(x)$ имеет асимптоту

B функция $f(x)$ нечетная

C функция $f(x)$ имеет один локальный минимум

D график функции $f(x)$ имеет две точки перегиба

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Предел $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}\right)$ равен

A $1/4$

B $1/2$

C $3/4$

D 1

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

8. Функция $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ на множестве $M = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 = 1\}$

A достигает наибольшего значения, равного 1

B достигает наименьшего значения, равного -2

C достигает наибольшего значения, равного 3

D не достигает наибольшего значения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Множество значений последовательности $\{x_n, n = 1,2,\dots\}$ не имеет предельных точек. Тогда

A последовательность $\{x_n\}$ сходится

B последовательность $\{x_n\}$ расходится

C последовательность $\{x_n\}$ ограниченная

D последовательность $\{x_n\}$ неограниченная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Функция $f(x)$ определена как сумма ряда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2/3)^n\, n!}{n^{2n/3}}\, x^n.$$

Тогда

A на отрезке $[-2/3, 2/3]$ функция $f(x)$ определена и непрерывна

B на отрезке $[-2e/3, 2e/3]$ функция $f(x)$ определена и непрерывна

C на отрезке $[-e/3, e/3]$ функция $f(x)$ определена и непрерывна

D на отрезке $[-e/6, e/6]$ функция $f(x)$ определена и непрерывна

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, и непрерывно дифференцируемая на интервале (a, b), достигает локального минимума во внутренней точке c: $a < c < b$. Тогда

A $f'(x) < 0$ при $a < x < c$ и $f'(x) > 0$ при $c < x < b$

B найдется такое $\varepsilon > 0$, что $f''(x) < 0$ при всех $c - \varepsilon < x < c$ и $f'(x) > 0$ при всех $c < x < c + \varepsilon$

C $f''(x) > 0$ в точке c

D найдется такое $\varepsilon > 0$, что $f'(x) > 0$ при всех $c - \varepsilon < x < c + \varepsilon$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln((4/\pi)\operatorname{arctg}(1+x))}{\operatorname{tg}(x)}$ равен

A $\pi/4$

B $\pi/2$

C $2/\pi$

D $4/\pi$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

13. Касательная к кривой $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, проведенная в точке $(\sqrt{3}, 3/2)$, пересекает ось абсцисс в точке

A $x = \sqrt{3}/4$

B $x = 3/4$

C $x = 4/\sqrt{3}$

D $x = 4/3$

E в точке, отличной от перечисленных в A, B, C, D, либо точка пересечения отсутствует

14. Предел $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{(x+4)^{3/2} - x^{3/2}}$ равен

A 1

B $\sqrt{2}$

C 2

D $\sqrt{8}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

15. Задана функция $f\colon [0,1] \to [0,1]$. Тогда

A если $f(x)$ непрерывная и монотонная, то $f(x)$ принимает все значения из $[0,1]$

B если $f(x)$ монотонная и принимает все значения из $[0,1]$, то $f(x)$ непрерывная

C если $f(x)$ непрерывная и принимает все значения из $[0,1]$, то $f(x)$ монотонная

D если $f(x)$ монотонная, непрерывная и принимает все значения из $[0,1]$, то $f(x)$ биективная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Наименьшая площадь треугольника, образованного графиком функции $y = |x|$ и отрезком прямой, проходящей через точку с координатами $x = 1$, $y = 2$, равна

A 2

B $\sqrt{8}$

C 3

D 4

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или наименьшей площади не существует

17. Пусть A_1, A_2, … — последовательность непустых вложенных множеств числовой прямой, и пусть

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Тогда

A если все множества $A_1, A_2, \ldots$ открытые, то $A = \varnothing$

B если все множества $A_1, A_2, \ldots$ замкнутые, то $A \neq \varnothing$

C если все множества $A_1, A_2, \ldots$ конечные, то $A = \varnothing$

D если все множества $A_1, A_2, \ldots$ неограниченные, то $A \neq \varnothing$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

18. Множество M числовой прямой содержит точку, которая не является граничной точкой множества M. Тогда множество M

A конечное

B счетное

C имеет мощность континуума

D замкнутое

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Дана функциональная последовательность

$$f_n(x) = n \log_{x^2+2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Пусть M — множество тех x, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Тогда

A функция $f(x)$ неограниченная

B функция $f(x)$ достигает наименьшего значения на M

C график функции $f(x)$ имеет ровно одну точку перегиба

D график функции $f(x)$ имеет асимптоту

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} - x\right)$ равен

A 0

B $-1/3$

C -1

D -3

E величине, отличной от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

21. Пусть $y = y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \dfrac{xy}{x^2-1}$, $y(0) = 1$. Тогда

A функция $y(x)$ нечетная

B функция $y(x)$ достигает наибольшего значения

C $y(2) = e^{\sqrt{3}-1}$

D график функции $y(x)$ имеет асимптоту

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ не сходится. Тогда

A существует такая перестановка членов последовательности, что полученная последовательность сходится

B последовательность $\{b_n = e^{a_n}, n = 1, 2, \dots\}$ не сходится

C последовательность $\{c_n = a_n^3, n = 1, 2, \dots\}$ не сходится

D последовательность $\{d_n = a_n^2 - a_n + 2, n = 1, 2, \dots\}$ не сходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\cos x} + \sin x\right)^{1/x}$ равен

A 1

B $\sqrt[4]{e^3}$

C e

D $\sqrt{e}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

24. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Наименьшее значение m и наибольшее значение M квадратичной формы $f(x) = x^{\mathsf{T}}Ax$ на множестве векторов x единичной длины равны соответственно

A $m = 1, M = 5$

B $m = 2, M = 4$

C $m = 3, M = 4$

D $m = 3, M = 6$

E паре чисел, отличной от перечисленных в A, B, C, D

25. Пусть $a_1 = (2x, x, 1)$, $a_2 = (1, 4, 3)$, $a_3 = (2, 3, 1)$ и $L \subset \mathbf{R}^3$ — линейная оболочка векторов a_1, a_2, a_3. Размерность подпространства L равна 2 при

A $x = -1/2$

B $x = -1$

C $x = 1$

D $x = 2/3$

E значении x, отличном от перечисленных в A, B, C, D, или такого значения x не существует

26. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A если λ — вещественное собственное число матрицы A^2 , то $\lambda \geqslant 0$

B если у матрицы A есть инвариантное подпространство, отличное от $\mathbf{R}^n$ и нулевого подпространства, то у матрицы A есть вещественное собственное число

C существует вырожденная матрица A, не имеющая вещественных собственных чисел

D если матрица A невырожденная и $\det(A^2 - 2A + I) = 0$, где I — единичная матрица, то число 2 является собственным числом матрицы $A + A^{-1}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

27. Пусть $f(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^2 - 10x - 16y$. Тогда наименьшее значение функции $f(x, y)$ равно

A -6

B -12

C -18

D -24

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или функция $f(x, y)$ не достигает наименьшего значения

28. Пусть

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

и $g(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$. Тогда производная $g'(0)$ равна

A 1

B -1

C $\quad 0$

D $\quad 1/\pi$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

29. Площадь фигуры, заключенной между кривыми $y = x^2$, $y^2 = x$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ равна

A $\quad 1/3$

B $\quad 1/2$

C $\quad 1/2$

D $\quad 2/3$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

30. Дана функция $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ на своей естественной области определения. Функцией, обратной к $f(x)$, является функция

A $\quad g(x) = \dfrac{1}{x+2}, x \neq -2$

B $\quad g(x) = \dfrac{2x+1}{x}, x \neq 0$

C $\quad g(x) = \dfrac{x+2}{x-2}, x \neq 2$

D $\quad g(x) = x + 2$

E $\quad$ функция, отличная от перечисленных в A, B, C, D, или обратной функции не существует

31. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда

A $\quad$ функция $f(x)$ непрерывна, но не дифференцируема в точке 0

B $\quad$ функция $f(x)$ периодическая

C $\quad f'(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$

D $\quad$ график функции $f(x)$ имеет асимптоту

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = x^2y^2$, $y(0) = 3$. Тогда значение $y(2)$ равно

A -3

B $7/3$

C $-3/7$

D $5/6$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

25.1.2 Вторая часть теста

1. Пусть

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x^2-4x-3}-1\right),\\
g_n(x) &= \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n},\\
h_n(x) &= \sqrt[n]{e^{nx}+e^{2nx}+e^{3nx}}.
\end{aligned}
$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \left\{x\colon x \leqslant -1 \text{ и } \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ существует}\right\},\\
M_2 &= \left\{x\colon -1 < x < 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} g_n(x) \text{ существует}\right\},\\
M_3 &= \left\{x\colon x \geqslant 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} h_n(x) \text{ существует}\right\}.
\end{aligned}
$$

Функция $F(x)$ определяется соотношениями:

$$
F(x) = \begin{cases}
\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & \text{при } x \in M_1,\\
\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) & \text{при } x \in M_2,\\
ax+b+\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) & \text{при } x \in M_3,
\end{cases}
$$

где a, b — вещественные числа. Тогда

а) функция $F(x)$ определена при всех вещественных x;

Да Нет

б) существуют такие числа a, b, что функция $F(x)$ непрерывна на всей области определения;

Да Нет

в) при $a = 0$, $b = 0$ уравнение $F(x) = c$ при любом $c \in [0, 1]$ имеет три корня;

Да Нет

г) существуют такие числа a, b, что функция $F(x)$ непрерывно дифференцируема на множестве $(-1, +\infty)$;

Да Нет

д) существуют такие числа a, b, что функция $F(x)$ дважды дифференцируема на множестве $(-1, +\infty)$;

Да Нет

е) существуют такие числа a, b, что функция $F(x)$ достигает наименьшего значения и не достигает наибольшего значения;

Да Нет

ж) существуют такие числа a, b, что функция $F(x)$ имеет три локальных экстремума;

Да Нет

з) существуют такие числа a, b, что график функции $F(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

2. Функции $f_n(x)\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ задаются равенством $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}$. Пусть $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_i'(x)$ — производная функции $f_i(x)$, $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$, M и M' — области определения функций $s(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно.

а) множество M замкнуто;

Да Нет

б) множество M' открыто;

Да Нет

в) функция $s(x)$ непрерывна на M;

Да Нет

г) функция $\varphi(x)$ непрерывна на M';

Да Нет

д) функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится к $s(x)$ равномерно на M;

Да Нет

е) функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится к $\varphi(x)$ равномерно на M';

Да Нет

ж) функция $s(x)$ достигает наименьшего значения на M;

Да Нет

з) функция $\varphi(x)$ достигает наибольшего значения на M'.

Да Нет

3. Пусть A — ортогональная матрица порядка $n \geqslant 2$. Рассматривается блочная матрица порядка $2n$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^{\mathsf{T}} & 0 \end{pmatrix},$$

где через A^{T} обозначается матрица, транспонированная к матрице A. Тогда

а) если матрица A симметричная, то матрица B симметричная;

Да Нет

б) если матрица A кососимметричная, то матрица B кососимметричная;

Да Нет

в) матрица B задаёт оператор проектирования;

Да Нет

г) матрица B ортогональная;

Да Нет

д) число 1 является собственным числом матрицы B и имеет геометрическую кратность n;

Да Нет

е) число -1 является собственным числом матрицы B и имеет геометрическую кратность n;

Да Нет

ж) если x является собственным вектором матрицы A, то $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы B;

Да Нет

з) если $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, то $Ax = y$, $Ay = x$.

Да Нет

4. Даны функция $f(x, y, z) = xy$ и множество $M = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 = 2, x + y + z = 0\}$. Тогда а) множество M ограниченное;

Да Нет

б) множество M неограниченное;

Да Нет

в) функция $f(x, y, z)$ достигает наибольшего значения на множестве M в нечётном числе точек;

Да Нет

г) функция $f(x, y, z)$ достигает наименьшего значения на множестве M в чётном числе точек;

Да Нет

д) точка $(x, y, z) = \left(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M;

Да Нет

е) точка $(x, y, z) = \left(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M;

Да Нет

ж) точка $(x, y, z) = (-1, 1, 0)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M;

Да Нет

з) точка $(x, y, z) = (-1, -1, 2)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M.

Да Нет

25.2 Ответы и решения теста

25.2.1 Ответы на вопросы первой части

1. E. **2.** E. **3.** A. **4.** C. **5.** C. **6.** A. **7.** B. **8.** C. **9.** E. **10.** E. **11.** E. **12.** C. **13.** C. **14.** D. **15.** B. **16.** C. **17.** E. **18.** C. **19.** D. **20.** E. **21.** B. **22.** C. **23.** C. **24.** B. **25.** B. **26.** D. **27.** E. **28.** A. **29.** A. **30.** B. **31.** D. **32.** E.

25.2.2 Решения задач второй части

Задача 1. Воспользуемся одним из замечательных пределов: $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{(1+y)^\alpha - 1}{y} = \alpha$. Получаем: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = -x^2 - 4x - 3$, предел существует при всех $x \in \mathbf{R}$. Из ряда Тейлора для функции $\ln(1+x)$ получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\dots+(-1)^n\frac{x^n}{n}\right)=x-\ln(1+x)$$

при всех $x\in(-1,1)$. Далее,

$$h_n(x)=\sqrt[n]{e^{nx}+e^{2nx}+e^{3nx}}=e^{3x}\sqrt[n]{e^{-2nx}+e^{-nx}+1}\to e^{3x}$$

при $x\geqslant 0$. Поэтому (см. рис. 29),

$$F(x)=\begin{cases}-x^2-4x-3, & x\leqslant -1,\\ x-\ln(1+x), & -1<x<0,\\ ax+b+e^{3x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

Значит, ответ на вопрос (а) — «да». Так как $\lim\limits_{x\to-1+}(x-\ln(1+x))=+\infty$, то в точке $x=-1$ у функции $F(x)$ разрыв второго рода, поэтому ответ на вопрос (б) — «нет». В точке $x=-2$ функция $-x^2-4x-3$ принимает наибольшее значение, равное 1. Из графика следует, что уравнение $F(x)=c$ имеет три решения при любом $c\in(0,1]$, но при $c=0$ только два решения. Поэтому ответ на вопрос (в) — «нет».

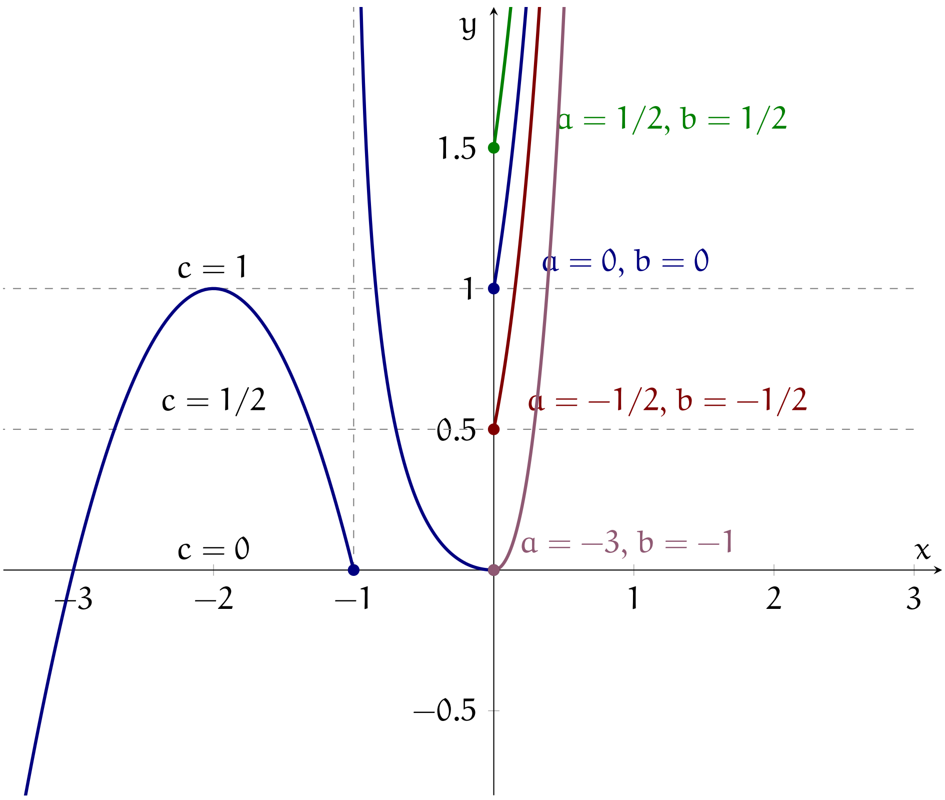


Рис. 29. График функции $F(x)$ при разных значениях a и b

Далее имеем:

$$x-\ln(1+x)\to 0,\qquad (x-\ln(1+x))'=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}\to 0\qquad \text{при } x\to 0-,$$

$$ax+b+e^{3x}\to b+1,\qquad \left(ax+b+e^{3x}\right)'=a+3e^{3x}\to a+3\qquad \text{при } x\to 0+.$$

Значит, для непрерывной дифференцируемости функции $F(x)$ необходимо, чтобы было $a=-3$, $b=-1$. Но выполнения этих условий и достаточно. Действительно, в этом случае

$$\lim_{x\to 0-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{x-\ln(1+x)}{x}=0$$

и

$$\lim_{x\to 0+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{3x}-3x-1}{x}=0.$$

Значит, $F'(0)=0$, производная непрерывна в точке $x=0$, а в точках $x\neq 0$, $x\in(-1,+\infty)$ производная, очевидно, непрерывна. Ответ на вопрос (г) — «да».

Далее,

$$\begin{aligned}(x-\ln(1+x))''&=\frac{1}{(1+x)^2}\to 1 &&\text{при } x\to 0-,\\ \left(-3x-1+e^{3x}\right)''&=9e^{3x}\to 9 &&\text{при } x\to 0+.\end{aligned}$$

Значит, ответ на вопрос (д) — «нет».

Так как $F(x)\to-\infty$ при $x\to-\infty$ при любых a, b, то ответ на вопрос (е) — «нет».

При любых a, b у функции $F(x)$ в точке $x=-2$ локальный максимум, в точке $x=-1$ локальный минимум. Положим $a=-3$, $b=-1$. Тогда точка $x=0$ является локальным минимумом функции $F(x)$. Значит, ответ на вопрос (ж) — «да».

При любых a, b график функции $F(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x=-1$. Значит, ответ на вопрос (з) — «да».

Задача 2. Функции $f_n(x)$ обладают свойством $0<f_n(x)\leqslant 1/n^2$, поэтому ряд из функций $f_n(x)$ мажорируется сходящимся числовым рядом:

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{n^2}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Отсюда следует, что ряд из функций $f_n(x)$ сходится равномерно на всей числовой прямой, и его сумма $s(x)$ — непрерывная функция. Соответственно $M=\mathbf{R}$, множество $\mathbf{R}$ замкнуто, поэтому ответ на вопрос (а) — «да», ответ на вопрос (в) — «да», ответ на вопрос (д) — «да».

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$, состоящий из производных функций $f_n(x)$, сходится также везде: при $x=0$ он сходится, поскольку все функции $f_n'(x)=(-2x)\dfrac{e^{-nx^2}}{n}$ в нуле равны нулю, а при любом $x\neq 0$ члены ряда — это функции, которые при любом фиксированном значении аргумента экспоненциально убывают (по абсолютной величине) по n при $n\to\infty$. Соответственно $M'=\mathbf{R}$, поэтому ответ на вопрос (б) — «да».

Вопрос о равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$ и о непрерывности функции $\varphi(x)$ требует более тонкого анализа. Найдем экстремумы функций $f_n'(x)$, для чего рассмотрим уравнение $f_n''(x)=0$:

$$f_n''(x)=(-2)\frac{e^{-nx^2}}{n}+4x^2e^{-nx^2}=0,\quad\text{или}\quad 4x^2=\frac{2}{n},$$

откуда находим критические точки:

$$x_n=\pm\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Чтобы удостовериться в том, что это именно точки экстремума, найдем вторые производные функций $f_n'(x)$, т. е. третьи производные функций $f_n(x)$, и их значения в этих точках:

$$f_n'''(x) = 4xe^{-nx^2} + 8xe^{-nx^2} - 8nx^3e^{-nx^2} = 4xe^{-nx^2}(3 - 2nx^2).$$

В критических точках получаем:

$$f_n'''(x_n) = 4x_ne^{-nx_n^2}(3 - 2nx_n^2) = \pm 4\frac{1}{\sqrt{2n}}(3 - 2n \cdot x_n^2) = \pm 8\frac{1}{\sqrt{2n}} \neq 0.$$

Здесь знак плюс соответствует случаю, когда $x_n > 0$, а знак минус — случаю, когда $x_n < 0$.

Таким образом, в точке $x = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ вторая производная функции $f_n'(x)$ положительна (это локальный минимум), а в точке $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ вторая производная функции $f_n'(x)$ отрицательна (это локальный максимум).

Найдем теперь значения функций $f_n'(x)$ в точках экстремумов:

$$f_n'(x_n) = (-2x_n)\frac{e^{-nx_n^2}}{n} = \mp 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}\frac{e^{-1/2}}{n} = \mp\frac{\sqrt{2}e^{-1/2}}{n^{3/2}}.$$

Здесь знак плюс соответствует случаю, когда $x_n < 0$, а знак минус — случаю, когда $x_n > 0$. Это означает что ряд из функций $f_n'(x)$ при всех $x \in \mathbf{R}$ может быть мажорирован сходящимся числовым рядом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n'(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}e^{-1/2}}{n^{3/2}},$$

а это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно на всей вещественной оси, и что функция $\varphi(x)$ непрерывна на всей вещественной оси. Соответственно ответ на вопрос (г) — «да», ответ на вопрос (е) — «да».

Перейдем к оставшимся двум вопросам. Функция $s(x)$ строго положительна на всей вещественной оси (она равна сумме положительных слагаемых) и монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ (это легко показать, сравнивая почленно равномерно сходящиеся ряды, скажем, для произвольных положительных значений аргумента x_1 и x_2, таких, что $x_2 > x_1$, и убедиться в том, что $s(x_2) < s(x_1)$), дифференцируема на всей вещественной оси, и ее производная равна функции $\varphi(x)$, которая обращается в ноль только в точке $x = 0$. Однако точка $x = 0$ — точка максимума для функции $s(x)$, соответственно своего наименьшего значения функция $s(x)$ не достигает, поэтому ответ на вопрос (ж) — «нет».

Функция же $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена на всей вещественной оси, положительна при $x < 0$ и отрицательна при $x > 0$, при этом она является нечетной и обращается в ноль при $x = 0$. При этом при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ функция $\varphi(x)$ также стремится к нулю. Таким образом, на отрицательной полуоси функция непрерывна, положительна при $x < 0$, обращается в ноль при $x = 0$ и стремится к нулю при $x \to -\infty$. Другими словами, при больших по модулю отрицательных значениях аргумента функция возрастает при росте значений аргумента, а вблизи нуля она убывает. Соответственно в какой-то точке

$x_0 < 0$ функция $\varphi(x)$, будучи непрерывной на отрицательной полуоси (включая значение $x = 0$), достигает своего наибольшего значения. Поэтому ответ на вопрос (з) — «да».

Задача 3. Прежде чем решать задачу, заметим следующее. Во-первых, матрица B симметрична:

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & (A^T)^T \\ A^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Во-вторых, квадрат матрицы B равен единичной матрице:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + A \cdot A^T & 0 \cdot A + A \cdot 0 \\ A^T \cdot 0 + 0 \cdot A & A^T \cdot A + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

(здесь и далее I — единичная матрица подходящего порядка), и мы воспользовались свойством ортогональности матрицы A, т. е. $A^T A = AA^T = I$.

Переходим к ответам на вопросы.

Поскольку матрица B симметрична при любой ортогональной матрице A, получаем, что ответ на вопрос (а) — «да», а ответ на вопрос (б) — «нет».

Оператор проектирования P должен удовлетворять равенству $P^2 = P$. Однако матрица B удовлетворяет другому равенству: $B^2 = I$. Поэтому она не задает оператор проектирования, и ответ на вопрос (в) — «нет».

Матрица B симметрична, ее квадрат равен I, поэтому $B^T B = B^2 = I$, соответственно она является ортогональной, так что ответ на вопрос (г) — «да».

Пусть вектор u размерности $2n$ является собственным вектором матрицы B с собственным числом λ. Обозначим первые n координат вектора u через x, оставшиеся n координат — через y. Тогда:

$$Bu = \lambda u \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay \\ A^T x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Соответственно в этом случае должны выполняться равенства $Ay = \lambda x$, $A^T x = \lambda y$. Отметим, что для ортогональных матриц все корни характеристического многочлена по модулю равны 1, поэтому либо $\lambda = 1$, либо $\lambda = -1$.

Если $\lambda = 1$, то $Ay = \lambda x = x$, и $A^T x = y$. Заметим, что при любом $x \in \mathbf{R}^n$ вектор $\begin{pmatrix} x \\ A^T x \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы B с собственным числом 1:

$$B \begin{pmatrix} x \\ A^T x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ A^T x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^T x \\ A^T x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ A^T x \end{pmatrix}.$$

Длина вектора x равна n, так что размерность пространства собственных векторов, соответствующих собственному числу 1, не меньше n, поэтому геометрическая кратность собственного числа 1 не меньше n.

Аналогично рассматривается случай собственного числа -1. Если $\lambda = -1$, то $Ay = \lambda x = -x$, и $A^T x = -y$. Можно заметить, что при любом $x \in \mathbf{R}^n$ вектор $\begin{pmatrix} x \\ -A^T x \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы B с собственным числом -1:

$$B\begin{pmatrix} x \\ -A^{\mathsf{T}}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^{\mathsf{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -A^{\mathsf{T}}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(-A^{\mathsf{T}}x) \\ A^{\mathsf{T}}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ A^{\mathsf{T}}x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ -A^{\mathsf{T}}x \end{pmatrix}.$$

Длина вектора x равна n, так что размерность пространства собственных векторов, соответствующих собственному числу -1, опять-таки не меньше n, а значит геометрическая кратность собственного числа -1 не меньше n.

Сумма геометрических кратностей собственных чисел 1 и -1 не меньше $2n$, но больше $2n$ она не может быть, так как размерность пространства равна $2n$. Поэтому геометрические кратности обоих собственных чисел равны n и ответы на вопрос (д) — «да», на вопрос (е) — «да».

Если вектор x является собственным вектором матрицы A, то $Ax = \lambda x$, где λ — собственное число, соответствующее данному вектору. Отсюда получаем $A^{\mathsf{T}}x = (1/\lambda)x$. Соответственно при действии матрицы B на вектор $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ получаем

$$B\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^{\mathsf{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax \\ A^{\mathsf{T}}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ (1/\lambda)x \end{pmatrix},$$

и поскольку либо $\lambda = 1$, либо $\lambda = -1$, т. е. $\lambda = 1/\lambda$, в итоге получаем, что

$$B\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$

то есть вектор $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы B. Таким образом, ответ на вопрос (ж) — «да».

Наконец, как было показано выше, если $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, то $Ax = y$, и $A^{\mathsf{T}}y = x$. При этом, вообще говоря, $Ay \neq A^{\mathsf{T}}y$. Например, если A — матрица оператора поворота на 45° в 2-мерном евклидовом пространстве, то матрица A^{T} — матрица оператора поворота на -45°, так что если $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то

$$y = Ax = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Ay = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{\mathsf{T}}y.$$

Соответственно равенство $Ay = x$ неверно, поэтому на вопрос (з) ответ «нет».

Задача 4. Поскольку координаты x и y точек, принадлежащих множеству M, подчинены условию $x^2+y^2 = 2$, то область их изменения ограничена: $-\sqrt{2} \leqslant x, y \leqslant \sqrt{2}$. Поскольку координата z точки, принадлежащей множеству M, подчинена условию $x + y + z = 0$, то есть она определяется равенством $z = -x-y$, то область ее изменения также ограничена: $-2\sqrt{2} \leqslant z \leqslant 2\sqrt{2}$. Значит, ответы на вопросы (а) — «да», (б) — «нет». Отметим также, что множество M является пересечением двух замкнутых поверхностей (цилиндра $x^2+y^2 = 2$

и плоскости $x + y + z = 0$), и поэтому оно является замкнутым, а в силу ограниченности оно является компактным.

Рассмотрим производные уравнений связи $g_1'(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 2)' = (2x, 2y, 0)$ и $g_2'(x, y, z) = (x + y + z)' = (1, 1, 1)$. Они ни при каких x, y, z не являются коллинеарными, откуда заключаем, что все точки множества M регулярные.

Рассмотрим теперь функцию Лагранжа для задачи поиска регулярных точек экстремума функции $f(x, y, z)$ на множестве M:

$$L(x, y, z) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2) + \mu(x + y + z) = 0.$$

Отсюда находим уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda x + \mu = 0,\\
&\frac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda y + \mu = 0,\\
&\frac{\partial L}{\partial z} = \mu = 0,\\
&x^2 + y^2 = 2,\\
&x + y + z = 0.
\end{aligned}$$

Из третьего уравнения видим, что $\mu = 0$, и первые два уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
&y + 2\lambda x = 0,\\
&x + 2\lambda y = 0.
\end{aligned}$$

Подставим $y = -2\lambda x$ во второе уравнение и получим $x - 4\lambda^2 x = 0$. Заметим, что если $x = 0$, то и $y = z = 0$, а точка $(0, 0, 0)$ не принадлежит множеству M, поэтому $\lambda^2 = 1/4$ и $\lambda = \pm 1/2$. В случае $\lambda = 1/2$ получаем условие $y = -x$, откуда и из условия $x^2 + y^2 = 2$ находим две точки $(1, -1, 0)$ и $(-1, 1, 0)$. В случае $\lambda = -1/2$ получаем условие $y = x$, откуда аналогично находим две точки $(1, 1, -2)$ и $(-1, -1, 2)$. Значения функции $f(x, y, z) = xy$ в этих точках равны:

$$\begin{aligned}
&f(1, -1, 0) = 1 \cdot (-1) = -1, \qquad f(-1, 1, 0) = (-1) \cdot 1 = -1,\\
&f(1, 1, -2) = 1 \cdot 1 = 1, \qquad f(-1, -1, 2) = (-1) \cdot (-1) = 1.
\end{aligned}$$

Так как функция $f(x, y, z)$ непрерывна, то на компактном множестве M она достигает наименьшего и наибольшего значения. Найденные точки содержат в себе все возможные точки экстремумов, в том числе глобальные. Поэтому в точках $(1, -1, 0)$ и $(-1, 1, 0)$, в которых значения функции $f(x, y, z)$ наименьшее из значений во всех возможных точках экстремума, функция достигает наименьшего значения на M. Аналогично в точках $(1, 1, -2)$ и $(-1, -1, 2)$ функция $f(x, y, z)$ достигает наибольшего значения на M.

Ответы на вопросы: (в) — «нет» (две точки), (г) — «да» (две точки), (д) — «нет», (е) — «нет», (ж) — «да», (з) — «да».